

[Retour à l'applet](#)

Potentiel de Morse

On étudie le mouvement d'une particule de masse m soumise à une force $F(x)$ qui dérive d'un potentiel de Morse $E_p(x)$.

$$E_p(x) = H \left((1 - e^{-kx})^2 - 1 \right)$$

L'expression de la force est :

$$F(x) = \frac{dE_p}{dx} = -2.k.H.(1 - e^{-kx}).e^{-kx}$$

La conservation de l'énergie permet d'écrire que :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + H(1 - e^{-kx})^2 = E + H$$

On pose $\tau = (E + H) / H$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \left(\tau - (1 - e^{-kx})^2 \right) \cdot \frac{2H}{m}$$

Cas $\tau < 1$

On fait le changement de variable

$$e^{kx} = \frac{1 - \sqrt{\tau} \cdot u}{1 - \tau} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{\tau}}{k(1 - \sqrt{\tau} \cdot u)} \frac{du}{dt}$$

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{2k^2 \cdot H \cdot (1 - \tau)}{m} (1 - u^2)$$

On pose :

$$\eta = \sqrt{\frac{2k^2 \cdot H \cdot (1 - \tau)}{m}}$$

Donc :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \eta \int dt$$

Dont la solution est : $\arccos(u) = \eta(t - t_i)$ soit : $u = \cos(\eta(t - t_i))$

t_i est une constante choisie pour que $x = 0$ si $t = 0$,

Soit finalement :

$$x = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{\tau} \cdot \cos(\eta(t - t_i))}{1 - \tau} \right)$$

avec :

$$t_i = \frac{1}{\eta} \arccos(\sqrt{\tau})$$

Cas $\tau > 1$

On fait le changement de variable

$$e^{kx} = \frac{\sqrt{\tau} \cdot u - 1}{\tau - 1} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{\tau}}{k(\sqrt{\tau} \cdot u - 1)} \frac{du}{dt}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2.H.(\tau - 1)}{m}(u^2 - 1)$$

On pose :

$$\eta = \sqrt{\frac{2k^2.H.(\tau - 1)}{m}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \eta \int dt$$

Dont la solution est : $\operatorname{arccosh}(u) = \eta(t - t_i)$ soit : $u = \cosh(\eta(t - t_i))$

t_i est une constante choisie pour que $x = 0$ si $t = 0$,

Soit finalement :

$$x = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\sqrt{\tau} \cdot \cosh(\eta(t - t_i)) - 1}{\tau - 1} \right)$$

avec :

$$t_i = \frac{1}{\eta} \operatorname{arccosh}(\sqrt{\tau})$$

Cas $\tau = 1$

On fait le changement de variable

$$e^{k.x} = u \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k.u} \frac{du}{dt}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2.k.H}{m}(2.u - 1)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{2.u - 1}} = \eta \int dt \quad \text{avec : } \eta = \sqrt{\frac{2k^2.H}{m}}$$

$$2.u - 1 = (\eta t - \eta t_i)^2$$

$$x = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{1 + (\eta t - \eta t_i)^2}{2} \right) \quad \text{avec : } t_i = \frac{1}{\eta}$$