DOMAINE EXPÉRIMENTAL

Nous donnons ici une méthode générale de détermination du domaine expérimental valable pour un nombre quelconque de constituants. Elle est décrite à l'aide d'un formalisme géométrique dont nous exposons les points essentiels. Ce formalisme n'est absolument pas indispensable mais il simplifie grandement l'écriture des résultats.

Formalisme géométrique

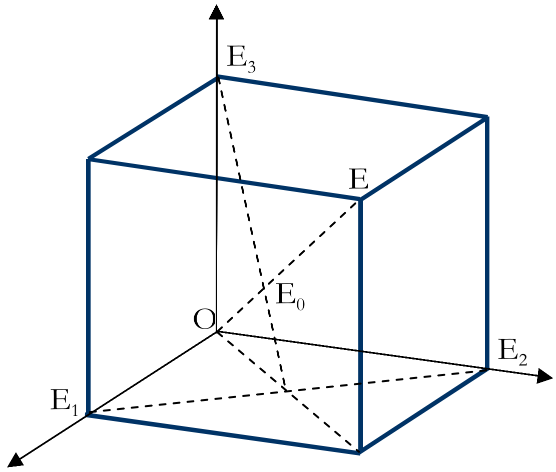
1) Notations

$\{E_i : i \in [1,n]\}$: base orthonormée naturelle de R^n.

Autres points : E et $E_0 = \dfrac{E}{n}$ (voir figure).

A : point de R^n de coordonnées $\{a_i\}$. $A = \sum a_i E_i$.

La lettre A désigne en même temps un élément de R^n considéré comme un espace vectoriel, le point géométrique A, et la matrice colonne formée par l'ensemble des coordonnées de A.



2) Feuillet d'un point

$f(A) = \sum a_i$ est appelé feuillet de A.

Cette fonction a pour avantage esthétique d'éviter d'écrire des sommations dans les équations.

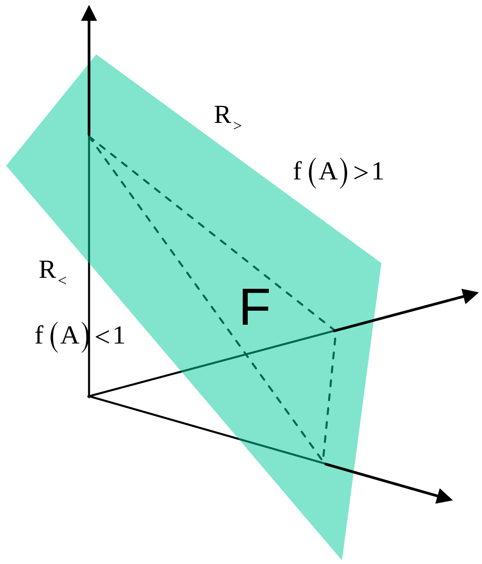
F : ensemble des points de R^n tels que $f(A) = 1$.

F est un hyperplan de dimension $n-1$.

F sépare R^n en deux parties disjointes.

$R_<$: ensemble des points A tels que $f(A) < 1$.

$R_>$: ensemble des points A tels que $f(A) > 1$.



3) Relation d'ordre partiel

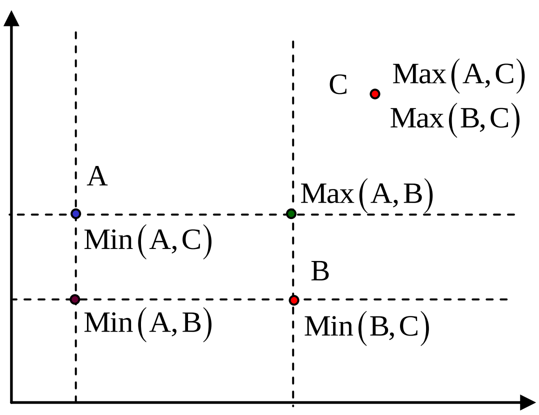
$A \le B$ si $a_i \le b_i \quad \forall i$.

Maximum et minimum de deux points :

$$\mathrm{Max}(A,B) = \sum \mathrm{Max}(a_i, b_i) E_i$$

$$\mathrm{Min}(A,B) = \sum \mathrm{Min}(a_i, b_i) E_i .$$

Illustration de ces définitions dans R^2 :



La généralisation à un nombre quelconque de points est évidente.

4) Homothétie-translation

Homothétie-translation H dans R^n : $HX = T + kX$.

HX ne représente pas un produit mais signifie simplement H appliqué sur X.

Homothétie-translation qui applique F sur lui-même : $\boxed{H_T X = T + k_T X}$ avec $k_T = 1 - f(T)$.

Tout point de R^n définit donc une homothétie-translation qui applique F sur lui-même.

On pose $T_F = \dfrac{T}{f(T)}$ $(T_F \in F)$. Alors $H_T X = T_F + k_T (X - T_F)$.

H_T est une homothétie de centre T_F et de rapport $k_T = 1 - f(T)$.

Ce type d'homothétie joue un rôle fondamental dans les plans de mélange et permet de décrire avec des formules simples des résultats complexes.

5) Simplexe associé à un point

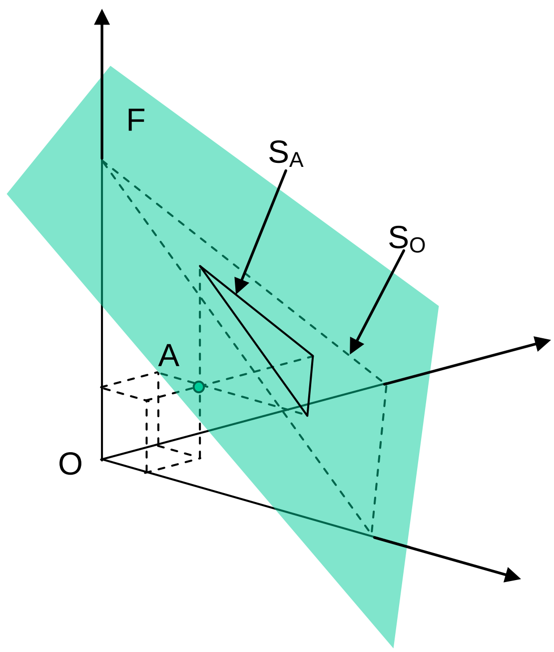
S_A est l'ensemble des points X tels que

$$\big(X \geq A,\ f(X) = 1\big) \text{ si } f(A) \leq 1,$$

ou $$\big(X \leq A,\ f(X) = 1\big) \text{ si } f(A) \geq 1.$$

L'étendue du simplexe S_A est définie par :

$$r_A = |k_A| = |1 - f(A)|.$$



6) Extrema induits

On montre que :

si $f(A) \leq 1$, alors $\big(X \geq A,\ f(X) = 1\big) \Rightarrow \big(X \leq H_A E,\ f(X) = 1\big)$.

si $f(A) \geq 1$, alors $\big(X \leq A,\ f(X) = 1\big) \Rightarrow \big(X \geq H_A E,\ f(X) = 1\big)$.

On résume en disant que $H_A E$ est l'extremum induit par l'extremum opposé A.

Détermination du domaine expérimental

1) Contraintes

Mélange : point de R^n : $X = \sum x_i E_i$.

Contraintes : $f(X) = 1$. $X \in F$.

Minima : L (Low)

Maxima : U (Up)

$$O \leq L \leq X \leq U \leq E.$$

2) Extrema induits, pseudo maxima

Extrema induits : $\begin{cases} L_U = H_U E \\ U_L = H_L E \end{cases}$.   Extrema effectifs : $\begin{cases} L' = \mathrm{Max}(L, L_U) \\ U' = \mathrm{Min}(U, U_L) \end{cases}$

Pseudo maxima : $\begin{cases} P = H_{L'}^{-1} U' = \dfrac{U' - L'}{r_{L'}} & \text{quand } r_{L'} \le r_{U'} \\ P = H_{U'}^{-1} L' = \dfrac{U' - L'}{r_{U'}} & \text{quand } r_{U'} \le r_{L'} \end{cases}$.   Donc $\boxed{P = \dfrac{U' - L'}{\mathrm{Min}(r_{L'}, r_{U'})}}$.

(Pseudo) domaine expérimental : $O \le Z \le P$, $f(Z) = 1$.

3) Définition géométrique du domaine expérimental

Le polytope P est défini comme suit :

Sommets : $P_N = \sum \varepsilon_i p_i E_i$ avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1.

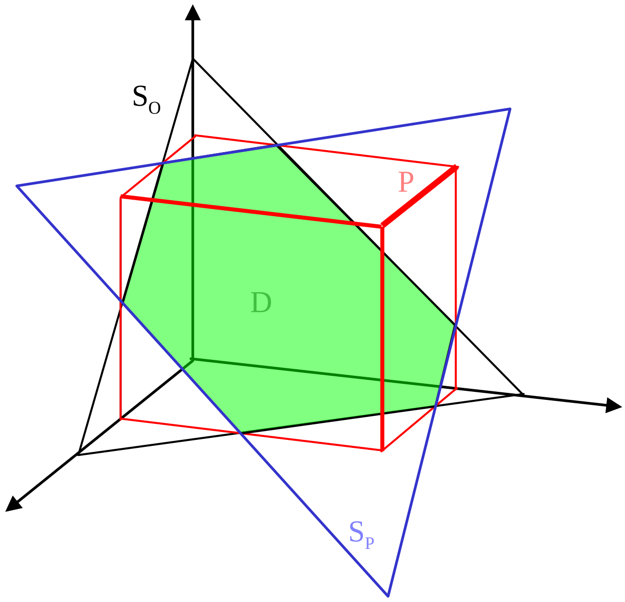
Numérotation des sommets : $N = \sum \varepsilon_i 2^{i-1}$.

Le point P est le sommet de numéro 2^n-1 du polytope P.

Domaine expérimental : $\boxed{D = P \cap F}$

ou $\boxed{D = S_O \cap S_P}$.

Le domaine est un simplexe régulier si et seulement si $P = E$

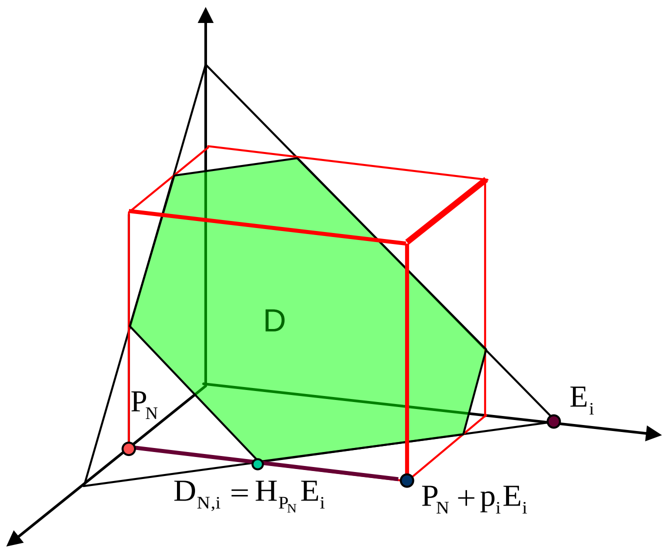


4) Détermination des sommets de D

Elle est basée sur des tests portant sur les sommets du polytope P.

Si $f(P_N) = 1$, P_N est un sommet du domaine expérimental.

Si $P_N \in R_<$ et $P_{N'} = P_N + p_i E_i \in R_>$,
alors $\boxed{D_{N,i} = H_{P_N} E_i}$ est un sommet du domaine expérimental.



Pour des informations plus détaillées, contacter André Leblé (adresse électronique sur la page Web)