Retour à l'applet

Superposition de modes propres d'une corde

Toute onde stationnaire de la forme y(x, t) = 2Asin(ω_kx/v).cos ω_kt (ω_k = kπv/L) est solution de l'équation d'onde. Une somme d'ondes stationnaires est également solution.
On suppose que la forme initiale de la corde est représentée par la série de Fourier :

$$y(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sin\,\omega_k\,\frac{x}{v}\right)\left(A_k\,\cos\,\omega_k t+B_k\,\sin\,\omega_k t\right)$$

En t = 0, on a donc les deux relations :

$$y(x,0)=\sum_k A_k\left(\sin\,\omega_k\,\frac{x}{v}\right)=\varphi(x)$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=\sum_k B_k\,\omega_k\left(\sin\,\omega_k\,\frac{x}{v}\right)=\phi(x)$$

Entre 0 et L, les fonctions sin(ω_kx/v) et cos(ω_kx/v) sont orthogonales :

$$\int_0^L \sin\left(\omega_k\,\frac{x}{v}\right)\sin\left(\omega_j\,\frac{x}{v}\right)dx=\begin{cases}0 & \text{si}\quad k\neq j\\ L/2 & \text{si}\quad k=j\end{cases}$$

Ceci permet de déterminer les coefficients A_k et B_k.

$$\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\omega_j\,\frac{x}{v}\right)dx=\sum\int_0^L \sin\left(\omega_k\,\frac{x}{v}\right)A_k\sin\left(\omega_j\,\frac{x}{v}\right)dx=\frac{L}{2}A_k$$

$$A_k=\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\omega_k\,\frac{x}{v}\right)dx$$

On détermine de même : $B_k=\dfrac{2}{\omega_k L}\displaystyle\int_0^L \phi(x)\sin\left(\omega_k\,\frac{x}{v}\right)dx$

La connaissance de la forme initiale de la corde permet donc de déterminer les coefficients et par suite il est possible de déterminer l'aspect de la corde à un instant t quelconque en utilisant la relation :

$$y(x,t)=\sum_k\left(\sin\,\omega_k\,\frac{x}{v}\right)\left(A_k\,\cos\,\omega_k t+B_k\,\sin\,\omega_k t\right)$$

Dans l'applet, on suppose que la corde, initialement au repos ($\phi(x) = 0$) est représentée à l'instant t = 0 par l'une des fonctions suivantes :

* $\varphi(x) = 1 - \cos(\pi x/D)$ si $0 \le x \le 2D$ et $\varphi(x) = 0$ si $2D < x \le L$

* $\varphi(x) = 2x/D$ si $0 \le x \le D$; $\varphi(x) = 2(2 - x)/D$ si $D < x \le 2D$ et $\varphi(x) = 0$ si $2D < x \le L$

On prend L = 10 et D = 1,5.Comme $\phi(x) = 0$, les B_k sont tous nuls. Pour le calculs des intégrales des coefficients A_k , on utilise la méthode de Simpson. On constate que pour k assez grand, les termes A_k deviennent négligeables.
On simule ensuite le mouvement de la corde en fonction du temps à partir de la relation :

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{m}A_k\,\sin\,k\pi\frac{x}{L}\cos k\pi\frac{vt}{L}$$

Retour à l'applet