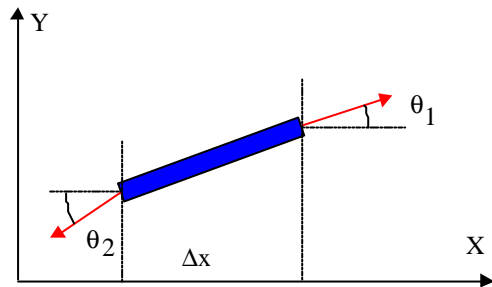


## Ondes à une dimension

### Étude analytique

On considère une corde de **masse linéaire**  $\mu$ , horizontale au repos. A l'instant  $t = 0$ , on donne à une portion de la corde des déplacements et des vitesses transversales.

On étudie l'évolution et la propagation de cette déformation au cours du temps. Si  $T$  est la tension de la corde, la force transversale agissant sur l'élément de longueur  $\Delta x$  est :



$$F_y = T \cdot \sin\theta_2 - T \cdot \sin\theta_1$$

Pour des mouvements de faible amplitude, on peut confondre sinus et tangente :

$$F_y = T \left( \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_2} - \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_1} \right)$$

Un développement au 2<sup>e</sup> ordre conduit à :

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_2} = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x_1} + \frac{d^2y}{dx^2} \Delta x$$

L'application du principe fondamental de la dynamique au segment  $\Delta x$  donne :

$$F_y = T \frac{d^2y}{dx^2} \Delta x = \mu \Delta x \frac{d^2y}{dt^2}$$

$y$  étant une fonction de  $x$  et de  $t$ ,  $T/\mu$  ayant la dimension du carré d'une vitesse, cette équation (équation d'onde) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}}$$

Cette équation admet comme solution générale :

$$y(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt)$$

$f_1(x + vt)$  correspond à un déplacement vers la gauche de la perturbation avec une vitesse  $v$ . De même  $f_2(x - vt)$  correspond à un déplacement vers la droite. Si  $f_1(x)$  correspond à la forme de la corde à l'instant  $t = 0$ , la forme à l'instant  $t$  s'obtient en translatant la fonction  $f_1(x)$  vers la gauche de la distance  $vt$ .

La solution à l'instant  $t$  dépend donc des **conditions initiales** et aux limites :

En  $t = 0$ , la forme de la corde est :  $y(x, 0) = \varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$  (1)

et de plus  $\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = v \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = v(f_1'(x) - f_2'(x)) = \phi(x)$

Par intégration de cette relation, on tire :  $\Phi(x) = v(f_1(x) - f_2(x))$  (2)

De (1) et (2), on tire :

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \Phi(x)/v$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \Phi(x)/v$$

La solution générale de l'équation d'onde est donc :

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \varphi(x + vt) + \frac{1}{2} \varphi(x - vt) + 1/v (\Phi(x + vt) - \Phi(x - vt))$$

### Cas particuliers :

a) Si en  $t = 0$ , la corde est immobile alors  $\phi(x) = 0$  et :  $y(x, t) = \frac{1}{2} \varphi(x + vt) + \frac{1}{2} \varphi(x - vt)$

b) Si la perturbation se propage dans un seul sens alors  $f_1(x) = 0$  ou  $f_2(x) = 0$ .

Si, par exemple,  $f_1(x) = 0$  alors  $\varphi(x) = -\Phi(x)/v$  et  $\phi(x) = -v \cdot d\varphi(x)/dx$

## Résolution numérique

On veut déduire  $y(x, t + \Delta t)$  de  $y(x, t)$ . Un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$y(x, t + \Delta t) \approx y(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \Delta t^2$$

En tenant compte de l'équation d'onde, on tire :

$$y(x, t + \Delta t) \approx y(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Delta t^2$$

On approxime la dérivée seconde par :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - 2y(x, t)}{\Delta x^2}$$

$$y(x, t + \Delta t) \approx y(x, t) + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{v^2 \Delta t^2}{2 \Delta x^2} (y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - 2y(x, t))$$

De même :

$$y(x, t - \Delta t) \approx y(x, t) - \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{v^2 \Delta t^2}{2 \Delta x^2} (y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - 2y(x, t))$$

Soit :

$$y(x, t + \Delta t) + y(x, t - \Delta t) \approx 2y(x, t) + \frac{v^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - 2y(x, t))$$

En posant  $a = v \cdot \Delta t / \Delta x$ , on obtient :

$$y(x, t + \Delta t) = 2 \cdot y(x, t) + a^2 [y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - 2y(x, t)] - y(x, t - \Delta t)$$

$$y(x, t + \Delta t) = 2 \cdot (1 - a^2) \cdot y(x, t) + a^2 [y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t)] - y(x, t - \Delta t)$$

Pour introduire les **conditions aux limites**, on peut noter que si les deux extrémités de la corde sont fixes alors  $y(0) = y(L) = 0$ . Si une extrémité est libre alors en cette extrémité  $(\partial y / \partial x) = 0$ . Pour traduire le fait que la pente de la corde est nulle, il suffit d'écrire que deux segments de corde consécutifs ont le même déplacement.

## Étude numérique de la propagation d'une perturbation

La corde de longueur  $L$  est découpée en  $n$  segments identiques : on peut donc prendre  $\Delta x = L/n$ . L'aspect de la corde pourra être représenté par un tableau contenant les ordonnées de chacun des  $n$  segments.

On suppose la corde initialement au repos  $\Rightarrow \phi(i) = 0 \quad (0 \leq i \leq n+1)$

On considère que la déformation initiale est soit une gaussienne centrée sur le segment  $i_0$  de la corde d'équation  $\phi(i) = y(i, 0) = A \cdot \exp[-B(i - i_0)^2] \quad (0 \leq i \leq n+1)$  soit une déformation en triangle centrée aussi sur  $i_0$ .

En  $t = 1$ , on calcule l'aspect de la corde qui est donné par la relation :

$$y(i, 1) = \phi(i) + \phi(i) + \frac{1}{2} a^2 \cdot [\phi(i+1) + \phi(i-1) - 2\phi(i)] \quad (1 \leq i \leq n)$$

On fait ensuite varier le temps en imposant en permanence les conditions aux limites : extrémité gauche fixe  $\{y(0, t) = 0\}$  et  $y(n, t) = 0$  ou  $y(n, t) = y(n+1, t)$  selon que l'extrémité droite de la corde est fixe ou libre.

Pour cela, on écrit que :

$$y(i, t+1) = 2(1 - a^2)y(i, t) + a^2 \cdot [y(i+1, t) + y(i-1, t)] - y(i, t-1)$$

La forme de la corde au temps  $t+1$  est fonction de sa forme aux temps  $t$  et  $t-1$  : il est nécessaire d'utiliser trois tableaux  $y_0(i)$  pour  $t-1$ ,  $y_1(i)$  pour  $t$  et  $y_2(i)$  pour  $t+1$ . A chaque pas du calcul, les deux premiers tableaux sont actualisés avec les valeurs des deux derniers.  $y_0(i) = y_1(i)$  et  $y_1(i) = y_2(i)$ .

[Retour à l'applet](#)