Retour à l’applet

Mouvements d’un proton dans un champ magnétique et/ou électrique

Dans une enceinte sous vide, on injecte des protons (masse m et charge q) avec une vitesse initiale $\mathbf{V}_0$. On applique un champ magnétique uniforme **B** selon la direction Oz et un champ électrique uniforme **E** dans la direction Oy. L'influence de la pesanteur est négligeable devant les autres forces.

L'équation générale du mouvement est donc : $m.\vec{a} = q.\vec{E} + q.(\vec{V} \wedge \vec{B})$ (k)

Cas B = 0.

Par projection de (k) sur les axes, on tire :

$$m.\frac{dV_x}{dt} = 0 \quad m.\frac{dV_y}{dt} = q.E \quad m.\frac{dV_y}{dt} = 0$$

Par intégration comme x(0) = 0, y(0) = 0 et z(0) = 0, on tire :

$$x = V_{x0}.t \quad y = \frac{q.E}{2.m}t^2 + V_{y0}.t \quad z = V_{z0}.t$$

Cas B ≠ 0.

Par projection de (k) sur les axes, on tire :

$$m\frac{dV_x}{dt} = q.B.V_y \quad (1)$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = -q.B.V_x + q.E \quad (2)$$

$$m\frac{dV_z}{dt} = 0 \quad (3)$$

L’intégration de (3) est immédiate est donne $z = V_{z0}.t$

Pour l’intégration de (1) et (2) on pose $\omega = \frac{q.B}{m}$ et V = Vx + i.Vy.   ($i^2 = -1$)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(Vx + iVy) = \frac{q.B}{m}(Vy - iVx) + i\frac{q.E}{m}$$

$$\frac{dV}{dt} + i.\omega.V = i\frac{q.E}{m}$$

La solution est la somme d’une solution particulière de l’équation avec second membre et de la solution générale de l’équation sans second membre : $V = V_0.e^{-i\omega t} + \frac{E}{B}$

Les conditions initiales sont : x(0) = 0, y(0) = 0 et z(0) = 0 ; Vx(0) = V_{x0} et Vy(0) = V_{y0}.

$$V = \left(V_{x0} - \frac{E}{B} + iV_{y0}\right)\left(\cos(\omega t) - i.\sin(\omega t)\right) + \frac{E}{B}$$

$$Vx = \left(V_{x0} - \frac{E}{B}\right)\cos(\omega t) + V_{y0}.\sin(\omega t) + \frac{E}{B}$$

$$Vy = V_{y0}.\cos(\omega t) - \left(V_{x0} - \frac{E}{B}\right).\sin(\omega t)$$

Une dernière intégration donne :

$$x = \frac{E}{B}.t + \frac{1}{\omega}\left(V_{x0} - \frac{E}{B}\right)\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega}V_{y0}.\left(1 - \cos(\omega t)\right)$$

$$y = \frac{1}{\omega}\left(V_{x0} - \frac{E}{B}\right).\left(\cos(\omega t) - 1\right) + \frac{1}{\omega}V_{y0}.\sin(\omega t)$$