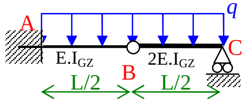
Exemple de détermination de déformée :

Sujet :
Considérons la structure suivante :



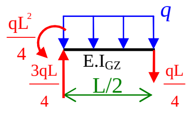
Nous allons rechercher l'équation de la déformée.

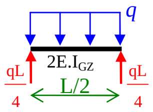
Résolution :

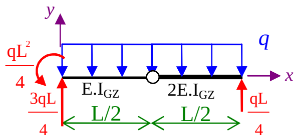
1) Nature :

$$\left.\begin{array}{l} x = 3+2+1 \\ e = 3\times 2 \end{array}\right\} isostatique$$

2) Actions de liaison (PFS) :







3) Sollicitations : équations de $M_z(x)$:

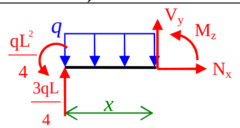
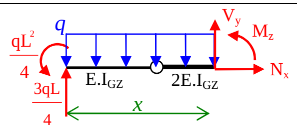
3.1) Nombre de tronçons à étudier :

2 tronçons :

$$0 < x < \frac{L}{2}$$

$$\frac{L}{2} < x < L$$

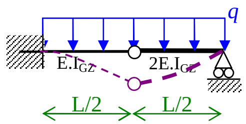
3.2) Equations :

$0 < x < \frac{L}{2}$		$N_x(x) = 0$ $V_y(x) = -\frac{3qL}{4} + qx$ $M_z(x) = -\frac{qL^2}{4} + \frac{3qL}{4}x - \frac{q}{2}x^2$
$\frac{L}{2} < x < L$		$N_x(x) = 0$ $V_y(x) = -\frac{3qL}{4} + qx$ $M_z(x) = -\frac{qL^2}{4} + \frac{3qL}{4}x - \frac{q}{2}x^2$

✍ *Remarque : les équations des deux tronçons sont identiques. Mais attention, il y a bel et bien deux tronçons !*

4) Etude de la déformée :

4.1) Allure de la déformée :



4.2) Intégration du moment de flexion :

	$0 < x < \frac{L}{2}$	$\frac{L}{2} < x < L$
$M_z(x) =$	$-\frac{qL^2}{4} + \frac{3qL}{4}x - \frac{q}{2}x^2$	$-\frac{qL^2}{4} + \frac{3qL}{4}x - \frac{q}{2}x^2$
$EI_{GZ} \times \omega(x) =$	$-\frac{qL^2}{4}x + \frac{3qL}{8}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + A$	$-\frac{qL^2}{8}x + \frac{3qL}{16}x^2 - \frac{q}{12}x^3 + C$
$EI_{GZ} \times f(x) =$	$-\frac{qL^2}{8}x^2 + \frac{qL}{8}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + Ax + B$	$-\frac{qL^2}{16}x^2 + \frac{qL}{16}x^3 - \frac{q}{48}x^4 + Cx + D$

Attention : la rigidité de la barre vaut 2EIGZ

4.3) Conditions limites :

C.A. : conditions aux appuis :	**C.C. : conditions de continuité :**
$f(0) = 0$ $\omega(0) = 0$ $f(L) = 0$	$f\left(\frac{L^-}{2}\right) = f\left(\frac{L^+}{2}\right)$

4.4) Constantes d'intégration :

$$\omega(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ}\omega(0) = 0 = -\frac{qL^2}{4}0 + \frac{3qL}{8}0^2 - \frac{q}{6}0^3 + A \rightarrow A = 0$$

$$f(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ} f(0) = 0 = -\frac{qL^2}{8}0^2 + \frac{qL}{8}0^3 - \frac{q}{24}0^4 + A\times 0 + B \rightarrow B = 0$$

$$f(L) = 0 \rightarrow EI_{GZ} f(L) = 0 = -\frac{qL^2}{16}L^2 + \frac{qL}{16}L^3 - \frac{q}{48}L^4 + CL + D \rightarrow D = -CL + \frac{q}{48}L^4 \quad ①$$

$$f\left(\frac{L^-}{2}\right) = f\left(\frac{L^+}{2}\right) \rightarrow EI_{GZ} f\left(\frac{L^-}{2}\right) = EI_{GZ} f\left(\frac{L^+}{2}\right)$$

$$-\frac{qL^2}{8}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{qL}{8}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{q}{24}\left(\frac{L}{2}\right)^4 = -\frac{qL^2}{16}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{qL}{16}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{q}{48}\left(\frac{L}{2}\right)^4 + C\frac{L}{2} + D$$

$$\rightarrow D = -\frac{CL}{2} - \frac{7qL^4}{768} \quad ②$$

$$①\&② \rightarrow D = -CL + \frac{q}{48}L^4 = -\frac{CL}{2} - \frac{7qL^4}{768} \rightarrow C = \frac{23qL^3}{384}$$

$$① \rightarrow D = -CL + \frac{q}{48}L^4 = -\frac{23q}{384}L^3 L + \frac{q}{48}L^4 = -\frac{5qL^4}{128}$$

4.5) Equations finales :

	$0 < x < \frac{L}{2}$	$\frac{L}{2} < x < L$
$\omega(x) =$	$\frac{1}{EI_{GZ}}\left[-\frac{qL^2}{4}x+\frac{3qL}{8}x^2-\frac{q}{6}x^3\right]$	$\frac{1}{EI_{GZ}}\left[-\frac{qL^2}{8}x+\frac{3qL}{16}x^2-\frac{q}{12}x^3+\frac{23qL^3}{384}\right]$
$f(x) =$	$\frac{1}{EI_{GZ}}\left[-\frac{qL^2}{8}x^2+\frac{qL}{8}x^3-\frac{q}{24}x^4\right]$	$\frac{1}{EI_{GZ}}\left[-\frac{qL^2}{16}x^2+\frac{qL}{16}x^3-\frac{q}{48}x^4+\frac{23qL^3}{384}x-\frac{5qL^4}{128}\right]$