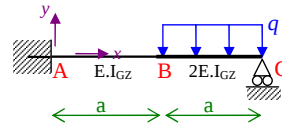


Exemple de résolution de structure hyperstatique par intégration du moment de flexion :

Sujet :

Considérons la structure suivante :

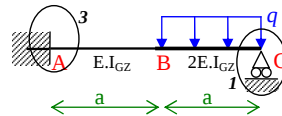


Nous allons rechercher les inconnues de liaisons.

Résolution :

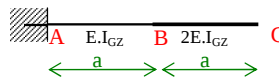
I) Nature :

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + 1 = 4 \\ e = 3 \times 1 = 3 \end{array} \right\} \text{hyperstatique de degré 1}$$

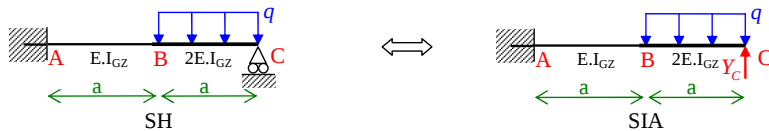


II) Résolution de l'inconnue hyperstatique :

2.1) Choix de la structure isostatique associée :



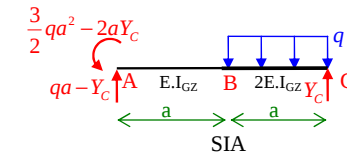
2.2) Condition d'équivalence :



Si $f_C = 0$

2.3) Détermination de la flèche en C de la SIA :

a) PFS :



b) Equations du moment de flexion :

- Nombre et limite des tronçons :

2 tronçons à étudier :

$$\begin{array}{l} 0 < x < a \\ a < x < 2a \end{array}$$

- Equations du moment de flexion :

$0 < x < a$	$a < x < 2a$
$\begin{aligned} N_x(x) &= 0 \\ V_y(x) &= Y_C - qx \\ M_z(x) &= (qa - Y_C)x - \frac{3}{2}qa^2 + 2aY_C \end{aligned}$	$\begin{aligned} N_x(x) &= 0 \\ V_y(x) &= -q(2a - x) + Y_C \\ &= -2qa + qx + Y_C \\ M_z(x) &= -q\frac{(2a - x)^2}{2} + Y_C(2a - x) \\ &= -2qa^2 + 2qax - \frac{q}{2}x^2 + 2aY_C - Y_Cx \end{aligned}$

c) Equations de la déformée :

- Equations de la déformée :

$0 < x < a$	$a < x < 2a$
$\begin{aligned} M_z(x) &= (qa - Y_C)x - \frac{3}{2}qa^2 + 2aY_C \\ EI_{Gz} \times \omega(x) &= \frac{qa - Y_C}{2}x^2 + \left(-\frac{3}{2}qa^2 + 2aY_C\right)x + A \\ EI_{Gz} \times f(x) &= \frac{qa - Y_C}{6}x^3 + \left(-\frac{3}{4}qa^2 + aY_C\right)x^2 + Ax + B \end{aligned}$	$\begin{aligned} M_z(x) &= -2qa^2 + 2aY_C + (2qa - Y_C)x - \frac{q}{2}x^2 \\ 2EI_{Gz} \times \omega(x) &= (2aY_C - 2qa^2)x + \left(qa - \frac{Y_C}{2}\right)x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C' \\ EI_{Gz} \times \omega(x) &= (aY_C - qa^2)x + \left(\frac{qa}{2} - \frac{Y_C}{4}\right)x^2 - \frac{q}{12}x^3 + C \\ EI_{Gz} \times f(x) &= \frac{(aY_C - qa^2)}{2}x^2 + \left(\frac{qa}{6} - \frac{Y_C}{12}\right)x^3 - \frac{q}{48}x^4 + Cx + D \end{aligned}$

- Constantes d'intégration :

$$\omega(0) = 0 \rightarrow EI_{Gz} \times \omega(0) = \frac{qa - Y_c}{2} 0^2 + \left(-\frac{3}{2} qa^2 + 2aY_c \right) 0 + A = 0 \rightarrow A = 0$$

$$f(0) = 0 \rightarrow EI_{Gz} \times f(0) = \frac{qa - Y_c}{6} 0^3 + \left(-\frac{3}{4} qa^2 + aY_c \right) 0^2 + A0 + B \rightarrow B = 0$$

$$\omega(a^-) = \omega(a^+) \rightarrow EI_{Gz} \times \omega(a) = \frac{3Y_c a^2}{2} - qa^3 = \frac{3Y_c a^2}{4} - \frac{7qa^3}{12} + C \rightarrow C = \frac{3}{4} Y_c a^2 - \frac{5}{12} qa^3$$

$$f(a^-) = f(a^+) \rightarrow EI_{Gz} \times f(a) = \frac{5}{6} Y_c a^3 - \frac{7}{12} qa^4 = \frac{7}{6} Y_c a^3 - \frac{37qa^4}{48} + D \rightarrow D = \frac{3}{16} qa^4 - \frac{1}{3} Y_c a^3$$

- Récapitulatif des équations :

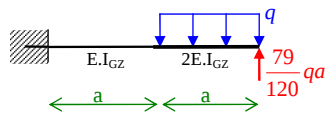
$0 < x < a$	$a < x < 2a$
$\omega(x) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\frac{qa - Y_c}{2} x^2 + \left(-\frac{3}{2} qa^2 + 2aY_c \right) x \right]$	$\omega(x) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\left(aY_c - qa^2 \right) x + \left(\frac{qa}{2} - \frac{Y_c}{4} \right) x^2 - \frac{q}{12} x^3 + \frac{3}{4} Y_c a^2 - \frac{5}{12} qa^3 \right]$
$f(x) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\frac{qa - Y_c}{6} x^3 + \left(-\frac{3}{4} qa^2 + aY_c \right) x^2 \right]$	$f(x) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left[\frac{\left(aY_c - qa^2 \right)}{2} x^2 + \left(\frac{qa}{6} - \frac{Y_c}{12} \right) x^3 - \frac{q}{48} x^4 \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4} Y_c a^2 - \frac{5}{12} qa^3 \right) x + \frac{3}{16} qa^4 - \frac{1}{3} Y_c a^3 \right]$

$$EI_{Gz} \times f(2a) = \frac{(aY_c - qa^2)}{2} 4a^2 + \left(\frac{qa}{6} - \frac{Y_c}{12} \right) 8a^3 - \frac{q}{48} 16a^4 + \left(\frac{3}{4} Y_c a^2 - \frac{5}{12} qa^3 \right) 2a + \frac{3}{16} qa^4 - \frac{1}{3} Y_c a^3$$

$$= \frac{5}{2} a^3 \times Y_c - \frac{79}{48} qa^4$$

2.4) Résolution :

$$f(2a) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} a^3 \times Y_c - \frac{79}{48} qa^4 = 0 \Rightarrow Y_c = \frac{79}{120} qa$$



III) Résolution des autres inconnues :

