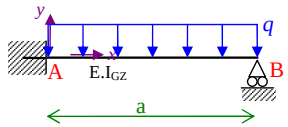
Exemple de résolution de structure hyperstatique par intégration du moment de flexion :

Sujet :

Considérons la structure suivante :

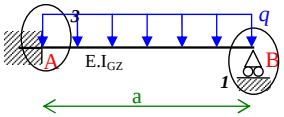


Nous allons rechercher les inconnues de liaisons.

Résolution :

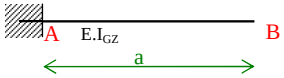
I) Nature :

$$\left.\begin{array}{l} x = 3+1 = 4 \\ e = 3\times 1 = 3 \end{array}\right\} \textit{hyperstatique de degré } 1$$

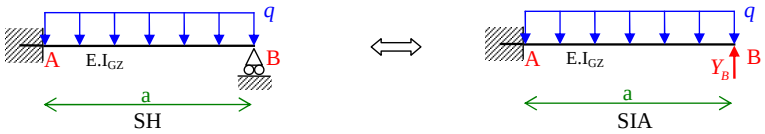


II) Résolution de l'inconnue hyperstatique :

2.1) Choix de la structure isostatique associée :



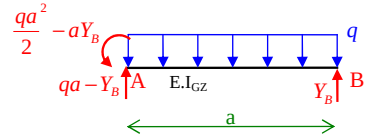
2.2) Condition d'équivalence :



Si $f_B = 0$

2.3) Détermination de la flèche en B de la SIA :

a) Actions de liaison :



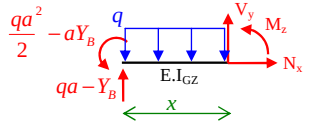
b) Equation du moment de flexion :

- Nombre et limite des tronçons :

1 tronçon à étudier : $0 < x < a$

- Equation du moment de flexion :

$0 < x < a$



$$N_x(x) = 0$$

$$V_y(x) = Y_B - qa + qx$$

$$M_z(x) = Y_B a - \frac{qa^2}{2} + qax - Y_B x - \frac{qx^2}{2}$$

c) Equations de la déformée :

- Equations de la déformée :

$0 < x < a$

$$M_z(x) = -\frac{qx^2}{2} + qax - Y_B x + Y_B a - \frac{qa^2}{2}$$

$$EI_{Gz} \times \omega(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{qa}{2}x^2 - \frac{Y_B}{2}x^2 + Y_B ax - \frac{qa^2}{2}x + A$$

$$EI_{Gz} \times f(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qa}{6}x^3 - \frac{Y_B}{6}x^3 + \frac{Y_B a}{2}x^2 - \frac{qa^2}{4}x^2 + Ax + B$$

- Constantes d'intégration :

$$\omega(0) = 0 \rightarrow EI_{Gz} \times \omega(0) = -\frac{q\times 0^3}{6} + \frac{qa}{2}0^2 - \frac{Y_B}{2}0^2 + Y_B a \times 0 - \frac{qa^2}{2}0 + A \rightarrow A = 0$$

$$f(0) = 0 \rightarrow -\frac{q0^4}{24} + \frac{qa}{6}0^3 - \frac{Y_B}{6}0^3 + \frac{Y_B a}{2}0^2 - \frac{qa^2}{4}0^2 + A\times 0 + B \rightarrow B = 0$$

- Récapitulatif des équations :

$0 < x < a$

$$\omega(x) = \frac{1}{EI_{Gz}}\left[-\frac{qx^3}{6} + \frac{qa}{2}x^2 - \frac{Y_B}{2}x^2 + Y_B ax - \frac{qa^2}{2}x\right]$$

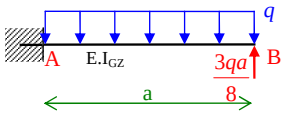
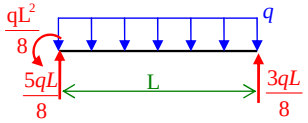
$$f(x) = \frac{1}{EI_{Gz}}\left[-\frac{qx^4}{24} + \frac{qa}{6}x^3 - \frac{Y_B}{6}x^3 + \frac{Y_B a}{2}x^2 - \frac{qa^2}{4}x^2\right]$$

d) Flèche en B :

$$EI_{Gz} f_B = EI_{Gz} \times f(a) = -\frac{qa^4}{24} + \frac{qa^4}{6} - \frac{Y_B a^3}{6} + \frac{Y_B a^3}{2} - \frac{qa^4}{4} = -\frac{qa^4}{8} + \frac{Y_B a^3}{3}$$

2.4) Résolution de l'inconnue hyperstatique :

$$f_B = f(a) = 0 \Rightarrow -\frac{qa^4}{8} + \frac{Y_B a^3}{3} = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{3qa}{8}$$



III) Résolution des autres inconnues (PFS) :