INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE BAYONNE
Département **G**estion des **E**ntreprises et des **A**dministrations

1ère ANNÉE

Année Universitaire 2007-2008

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Groupe S1 (10 janvier 2008)

Documents non autorisés

CALCULATRICE MODÈLE CASIO FC100V

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et pour tout entier naturel n,

$$2u_{n+1} = u_n + 5$$

1. **a)** Déterminer u_1 ; u_2 et u_3.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = u_n - 5$$

a) Déterminer v_0 ; v_1 et v_2.

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

d) En déduire u_n en fonction de n.

e) Calculer $S = \sum_{k=0}^{15} v_k$

3. Calculer $T = \sum_{k=0}^{15} u_k$.

Exercice 2 :

Trouver deux matrices X et Y d'ordre (2 ; 3) telles que :

$$2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 4 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad -5X + Y = \begin{pmatrix} -10 & -19 & 7 \\ 12 & -14 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les matrices *X et Y*.

Exercice 3 :

Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 jetés de lit.
Deux ateliers de confection font des offres par lots :

- L'atelier Idéa : un lot de 12 coussins, 4 rideaux et 4 jetés de lit pour un montant de 200 €.
- L'atelier Rénov : un lot de 6 coussins, 6 rideaux et 2 jetés de lit pour un montant de 150 €.

On notera x le nombre de lots Idéa achetés et y le nombre de lots Rénov achetés.

1. Traduire les contraintes du problème portant sur x et y par un système d'inéquations.

2. Exprimer la dépense occasionnée par l'achat de x lots Idéa et y lots Rénov.

Exercice 4 :

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; 2[par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{(x-2)^2}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. Résoudre dans l'intervalle]0 ; 2[l'équation :

$$1+2\ln x=0$$

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle]0 ; 2[par :

$$g(x)=x-2-2x\ln x$$

a) Déterminer la dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle]0 ; 2[.

b) Démontrer que la fonction g admet en $\frac{1}{\sqrt{e}}$ un maximum égal à $\frac{2}{\sqrt{e}}-2$.

c) Montrer que $g(x)<0$ pour x appartenant à l'intervalle]0 ; 2[.

Partie B : Étude et représentation graphique de la fonction *f*

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle]0 ; 2[.

2. **a)** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle]0 ; 2[:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-2)^3}$$

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 2[.

Partie C : Calcul d'aire

Soit la fonction F définie sur l'intervalle]0 ; 2[par :

$$F(x)=\frac{\ln x}{2-x}+\frac{1}{2}\left[\ln(2-x)-\ln x\right].$$

On admet que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 2[et que pour tout x de l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$, $f(x)\geqslant 0$.

On appelle S l'aire, exprimée en cm², de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\frac{3}{2}$.

Calculer la valeur exacte de S puis la valeur arrondie au centième.