INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE BAYONNE
Département **G**estion des **E**ntreprises et des **A**dministrations

1$^{\text{ère}}$ ANNÉE

Année Universitaire 2006-2007

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Groupe S1 (21 décembre 2006)

Documents non autorisés

CALCULATRICE MODÈLE CASIO FC100V

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2$$

1. **a)** Déterminer u_1 ; u_2 et u_3.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

2. Pour tout entier naturel *n*, on pose

$$v_n = u_n - 1$$

a) Déterminer v_0 ; v_1 et v_2.

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

c) Exprimer v_n en fonction de *n*.

d) En déduire u_n en fonction de *n*.

e) Calculer $S = \sum_{k=0}^{11} v_k$

3. Calculer $T = \sum_{k=0}^{11} u_k$.

Exercice 2 :

Paul veut offrir à boire à quelques jeunes. Il habite la campagne et se déplace à bicyclette. Sa charge ne peut dépasser 22 kg et il n'a le temps de faire qu'un seul voyage. Il achète les fruits et l'eau gazeuse et prépare lui-même la base des boissons (il ajoutera l'eau plate chez les jeunes afin d'obtenir les quantités de boissons souhaitées).
Connaissant les goûts des jeunes, il sait qu'il lui faut au moins 4,5 kg d'oranges et 3kg de pamplemousses. Il présente les boissons sous forme de deux mélanges :

- mélange fruité : 1,5 kg d'oranges et 0,75 kg de pamplemousses
- mélange gazeux : 3 kg d'oranges et 1,5 litre d'eau gazeuse (pesant exactement 1,5 kg).

Chaque mélange fournit, par addition d'eau, 6 litres de boisson.
Paul doit prévoir au moins 42 litres de boisson en tout pour satisfaire les jeunes.
Son épicier ne dispose que de 18 kg d'oranges. Le prix des oranges est de 1 € le kilogramme, celui des pamplemousses de 1,50 € le kilogramme et celui de l'eau gazeuse de 0,61 € le litre.
On cherche à savoir Comment Paul doit organiser ses achats pour satisfaire ces jeunes en dépensant le moins possible
Écrire, sans le résoudre, le programme linéaire permettant de répondre à la question.
On appellera x le nombre de mélanges fruités et y le nombre de mélanges gazeux que Paul doit préparer avant de partir.

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
$\ln\left(x^2 - 4e^2\right) < 1 + \ln(3x)$

Exercice 4 :

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$$

On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		$\ln\frac{5}{4}$		$+\infty$
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
2. En déduire suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Dans le plan, muni d'un repère orthogonal, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Vérifier que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$,

$$f(x) = 2 + 2x + \frac{1}{e^x - 1}$$

2. Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$ que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
3. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. **a)** f' étant la dérivée de la fonction f, montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, $f'(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\left(e^x - 1\right)^2}$$

b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Dresser alors le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ.