INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE BAYONNE
Département **G**estion des **E**ntreprises et des **A**dministrations

1ère ANNÉE

Année Universitaire 2004-2005

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Groupe A (16 décembre 2004)

Documents non autorisés

CALCULATRICE MODÈLE CASIO FC100

Exercice 1 :

Soit *f* la fonction définie par $f\ :\ x \mapsto \dfrac{2\ln x - 1}{\ln x + 2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction *f*.
2. Montrer que *f* est une bijection de D sur un intervalle que l'on déterminera.
3. Définir la fonction f^{-1}.

Exercice 2 :

On considère la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -\dfrac{2}{x}$.

La courbe représentative de la fonction *g* admet-elle des tangentes passant par le point $\mathrm{A}(2\ ;\ 2)$?

Exercice 3 :

On considère la fonction *h* définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $h(x\ ;\ y\ ;\ z) = 4x^3y + 3xe^{-3y}\sqrt{y^2+1}$.

Déterminer toutes les dérivées partielles de *h*.

Exercice 4 :

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (2x\ ;\ x-1) \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\ ;\ y) & \longmapsto & (y\ ;\ 0) \end{array}$$

Déterminer, si elles existent les composées *fog* et *gof*.

Exercice 5 :

Partie A

Étude d'une fonction auxiliaire

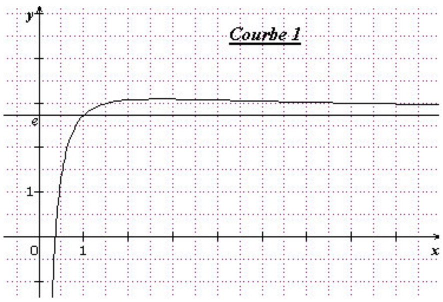
Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+e$

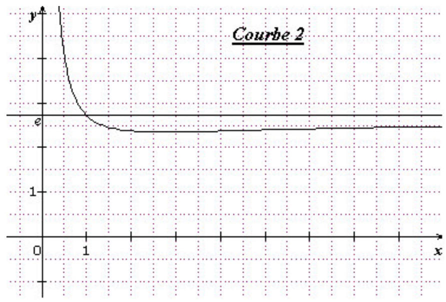
On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

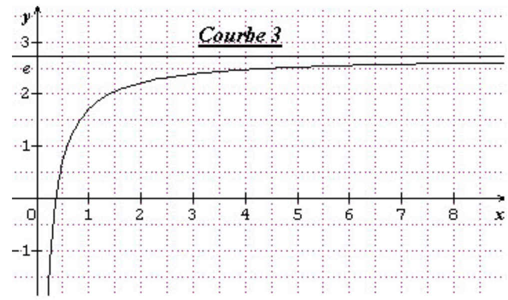
1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_g$?

2. Déterminer à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. Dresser le tableau de variation de g.

3.







L'une des trois courbes ci-dessus est la courbe $\mathcal{C}_g$. Indiquer le numéro correspondant à $\mathcal{C}_g$ en précisant les raisons de votre choix.

4. Calculer $g\left(\dfrac{1}{e}\right)$. En déduire, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, le signe de $g(x)$.

Partie B

Étude de fonction et tracé de sa courbe représentative.

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+e.x+e$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unités 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Soit x appartenant à $]0\,;+\infty[$. Vérifier que $f'(x)=g(x)$.

2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 1. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$

5. Tracer $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_f$. (*On utilisera le papier millimétré de la page 3 qui sera remise avec la copie*).

Partie C

Soit H la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $H(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$.

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=(\ln x)^2$.

Vérifier que H est une primitive de h sur $]0\,;+\infty[$.

En déduire une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE BAYONNE
Département **G**estion des **E**ntreprises et des **A**dministrations

1ère ANNÉE

Année Universitaire 2004-2005

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 5 : Partie B

NOM : **Prénom** : **Groupe** :