INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE BAYONNE
Département **G**estion des **E**ntreprises et des **A**dministrations

1$^{\text{ère}}$ ANNÉE

Année Universitaire 2003-2004

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES

Groupe A (18 décembre 2003)

Documents non autorisés

CALCULATRICE MODÈLE CASIO FC100

Exercice 1 :

Soit $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / |x-1| < 3 \text{ ou } y + x - 2 < 0\}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble F.

2. On considère la relation binaire de R dans R admettant F pour graphe.
Déterminer graphiquement l'image ou les images de 5.
Déterminer graphiquement l'antécédent ou les antécédents de – 4 .

Exercice 2 :

Soit $f : (x ; y ; z) \longrightarrow 3x^5 y + \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 5x$

On ne déterminera pas l'ensemble de définition de la fonction f.

1. Quel est le nombre de variables de la fonction f ?

2. Calculer toutes les dérivées partielles de f.

Exercice 3 :

Les deux questions sont indépendantes.

Soient $f : x \longrightarrow \frac{2e^x + 5}{e^x + 4}$ et $g : (x ; y) \longrightarrow x + 4y$

1. Montrer que la fonction f est bijective de R sur un intervalle que l'on déterminera et définir sa fonction réciproque.

2. Peut-on déterminer $f \circ g$? $g \circ f$?
Si oui, en donner l'expression. Dans le cas contraire, justifier.

Exercice 4 :

On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{8}{2e^x - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.

2. Montrer que $h(x) = -8 + 16\frac{e^x}{2e^x - 1}$

3. En déduire une primitive H de h.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; i ; j) d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A :

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
4. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations de cette fonction. *On ne demande pas de tracer la courbe représentative de la fonction f.*
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [1 ; 3].

PARTIE B :

1. Montrer que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

   Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(x_0)$, où x_0 désigne le nombre défini à la question **5** de la partie **A**.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;+\infty[$, en donnant les justifications nécessaires. *On admettra que la fonction g est dérivable en 0.*

PARTIE C :

On considère la fonction F définie pour tout x de R par $F(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right)e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur R.
2. On considère l'aire $\mathcal{a}$, exprimée en cm², de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$. *On rappelle que f est strictement positive sur [0 ; $+\infty$[.*
   Donner la valeur exacte de $\mathcal{a}$ puis une valeur approchée de $\mathcal{a}$ à 10^{-2} près.