FORMULAIRE D'ANALYSE

A- Propriétés algébriques des fonctions usuelles.

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0)$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$\ln a^x = x \ln a$

Si $x \in]-\infty \,;\, +\infty[$ et $y \in]0 \,;\, +\infty[$

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*, x \in]0 \,;\, +\infty[$ et $y \in]0 \,;\, +\infty[$

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B- Limites usuelles de fonctions

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; Si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; Si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

C- Dérivées et primitives

1. Tableau des dérivées et primitives des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty\,;+\infty[$
x	1	$]-\infty\,;+\infty[$
x^n, $n\in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n\in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
x^α, $\alpha\in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0\,;+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty\,;+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)'=u'+v'$

$(ku)'=ku'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$(v \circ u)'=(v' \circ u)u'$

$(e^u)'=u'e^u$

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

u à valeurs strictement positives.

$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$

D- Calcul intégral

Formules fondamentales

- Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$
- Si $g(x)=\int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x)=f(x)$
- $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$

Formule de Chasles :

$$\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité :

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a<b$ et $f>0$, alors $\int_a^b f(t)dt>0$

Intégration d'une inégalité

- Si $a<b$ et $f<g$, alors $\int_a^b f(t)dt<\int_a^b g(t)dt$
- Si $a<b$ et $m<f<M$, alors $m(b-a)<\int_a^b f(t)dt<M(b-a)$

Valeur moyenne de *f* sur [*a* ; *b*]

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$