INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE BAYONNE
Département **G**estion des **E**ntreprises et des **A**dministrations
Année Universitaire 2007-2008 - **Groupe S1**

1$^{\text{ère}}$ ANNÉE

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DU CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES DU 10/01/08

Exercice 1 :

1. **a)** $u_1 = 7$; $u_2 = 6$ et $u_3 = \dfrac{11}{2}$.

b) ➢ $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

➢ $u_1 / u_0 \neq u_2 / u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2.

a) $v_0 = 4$; $v_1 = 2$ et $v_2 = 1$.

b) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 5}{u_n - 5} = \dfrac{\frac{1}{2}(u_n - 5) - 5}{u_n - 5} = \dfrac{1}{2}$ donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

c) $v_n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{4}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-2}}$

d) $u_n = \dfrac{4}{2^n} + 5$

e) $S = \sum_{k=0}^{15} v_k = 4 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{1 - \frac{1}{2}} = 8\left(1 - \dfrac{1}{2^{16}}\right)$

3. $T = \sum_{k=0}^{15} u_k = \sum_{k=0}^{15} (v_k + 5) = S + 5 \times 16 = 80 + 8\left(1 - \dfrac{1}{2^{16}}\right)$

Exercice 2 :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 12x + 6y \geq 72 \\ 4x + 6y \geq 48 \\ 4x + 2y \geq 32 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 12 \\ 2x + 3y \geq 24 \\ 2x + y \geq 16 \end{cases}$$ La dépense à minimiser est $d = 200x + 150y$

☞

Exercice 4 :

Partie A

1. $1+2\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{e}}\in\ ]0\,;2[$ donc $S=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right\}$

2. **a)** $g'(x)=1-2(\ln x+1)=-2\ln x-1$. $g'(x)>0 \Leftrightarrow -2\ln x-1>0 \Leftrightarrow \ln x<-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

donc g' est positive sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}\,;0\right[$

b) D'après les résultats de la question précédente, g admet un maximum en $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}-2-2\frac{1}{\sqrt{e}}\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{1}{\sqrt{e}}-2+\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{2}{\sqrt{e}}-2$$

c) Pour tout x de $]0\,;2[$ $\quad g(x)<\dfrac{2}{\sqrt{e}}-2<0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(x-2)^2=4$; $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to2^-}\ln(x)=\ln 2$ et $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^2=0^+$

2. **a)** $$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-2)^2-2(x-2)\ln x}{(x-2)^4}=\frac{\frac{1}{x}(x-2)(x-2-2x\ln x)}{(x-2)^4}=\frac{x-2-2x\ln x}{x(x-2)^3}=\frac{g(x)}{x(x-2)^3}$$

b) $g(x)<0$; $x>0$ et $(x-2)^3<0$ sur $]0\,;2[$ donc $f'(x)<0$ sur $]0\,;2[$.

x	0		2
$f'(x)$	‖	+	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖

Partie C

L'aire cherchée en unités d'aire est donnée par :

$$\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx=F\left(\frac{3}{2}\right)-F(1)=\frac{\ln\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left[\ln\left(2-\frac{3}{2}\right)-\ln\frac{3}{2}\right]-0=\frac{\ln\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right]=\frac{3}{2}\ln 3-2\ln 2\ \text{u.a.}$$

Donc $S=\left(\dfrac{3}{2}\ln 3-2\ln 2\right)\times 5$ cm² $\approx 1{,}31$ cm².