INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE BAYONNE
Département **G**estion des **E**ntreprises et des **A**dministrations

<u>Éléments de correction du contrôle de mathématiques du 21 décembre 2006 (module M 911)</u>

<u>Exercice 1 :</u>

1. **a)** $u_1 = 13$; $u_2 = 37$; $u_3 = 109$.

b) $u_1 - u_0 = 8$ et $u_2 - u_1 = 24$ $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
$u_1 / u_0 = 13/5$ et $u_2 / u_1 = 37/13$ $u_1 / u_0 \neq u_2 / u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2.

a) $v_0 = 4$; $v_1 = 12$; $v_2 = 36$.

b) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1 = 3u_n - 3 = 3(u_n - 1) = 3v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison 3.

c) $v_n = v_0 q^n = 4 \times 3^n$

d) $u_n = v_n + 1 = 4 \times 3^n + 1$

e) $S = \sum_{k=0}^{11} v_k = v_0 \times \frac{1-3^{12}}{1-3} = 1062\,880$

3. $T = \sum_{k=0}^{11} u_k = \sum_{k=0}^{11} (u_k + 1) = S + 12 = 1062\,892$.

<u>Exercice 2 :</u>

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 4{,}5 \leq 1{,}5x + 3y \leq 18 \\ 0{,}75x \geq 3 \\ 2{,}25x + 4{,}5y \leq 22 \\ x + y \geq 7 \end{cases}$$

coût à minimiser : $2{,}625x + 3{,}915y$

<u>Exercice 3 :</u>

Inéquation résolue en cours : D = $]2e\ ;\ +\infty[$ et S = $]2e\ ;\ 4e[$

<u>Exercice 4 :</u>

<u>Partie A</u>

$$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$$

1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$. On pose $X = e^x$ et on résout $2X^2 - 5X + 2 = 0$; $\Delta = 9 > 0$
$X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = 2$ d'où $x_1 = \ln\frac{1}{2}$ et $x_2 = \ln 2$ donc $S = \left\{\ln\frac{1}{2}\ ;\ \ln 2\right\}$

2. $g(x) < 0$ pour $x \in \left]\ln\frac{1}{2}\ ;\ \ln 2\right[$ et $g(x) > 0$ pour $s \in \left]-\infty\ ;\ \ln\frac{1}{2}\right[\cup]\ln 2\ ;\ +\infty[$

Partie B

1. $2+2x+\dfrac{1}{e^x-1}=1+2x+\dfrac{e^x-1+1}{e^x-1}=1+2x+\dfrac{e^x}{e^x-1}=f(x)$

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

4. **a)** $f'(x)=2-\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{2\left(e^x-1\right)^2-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{2\left(e^{2x}-2e^x+1\right)-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{2e^{2x}-5e^x+2}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$$

b) Comme $\left(e^x-1\right)^2>0$ sur $]0\,;+\infty[$ alors $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $f'(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]0\,;\ln 2[$ (voir question 2 partie A).

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$3+2\ln 2$	↗	$+\infty$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(2x+2)\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=0$ donc la droite Δ d'équation $y=2x+2$ est asymptote à la courbe quand $x\to+\infty$.

• $f(x)-(2x+2)=\dfrac{1}{e^x-1}$; $\dfrac{1}{e^x-1}>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

Donc sur $]0\,;+\infty[$, $f(x)>2x+2$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ.