CORRECTION DU CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES - DÉCEMBRE 2004

Exercice 1 :

1. $f: x \mapsto \dfrac{2\ln x - 1}{\ln x + 2}$ est définie pour $x > 0$ et si $\ln x + 2 \neq 0$ soit $\ln x \neq -2$ soit $x \neq e^{-2}$ d'où $D_f = \left]0; e^{-2}\right[\cup \left]e^{-2}; +\infty\right[$

2. *f* est une application sur D_f. Pour tout *y* de ℝ, peut-on trouver *x* tel que $y = f(x)$? $y = f(x) \Leftrightarrow$
$y = \dfrac{2\ln x - 1}{\ln x + 2} \Leftrightarrow y\ln x + 2y = 2\ln x - 1 \Leftrightarrow y\ln x - 2\ln x = -1 - 2y \Leftrightarrow \ln x(y-2) = -1-2y \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{-1-2y}{y-2}$ si $y \neq 2$
$\Leftrightarrow x = e^{\frac{-1-2y}{y-2}}$ et $y \neq 2$. Donc *x* existe et est unique pour tout $y \neq 2$. Donc *f* est une bijection de D_f sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

3. $f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \to D_f$ qui à tout *y* associe $f^{-1}(y) = e^{\frac{-1-2y}{y-2}}$.

Exercice 2 :

$g(x) = -\dfrac{2}{x}$ $D_g = \mathbb{R}^*$ $g(2) = -1$ donc A $\notin \mathcal{C}_g$. L'équation de la tangente $\mathcal{C}_g$ à en x_0 est $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$
$g'(x_0) = \dfrac{2}{x_0^2}$ et A est sur la droite cherchée don l'équation devient : $2 = \dfrac{2}{x_0^2}(2 - x_0) - \dfrac{2}{x_0}$
soit $2x_0^2 = 2(2 - x_0) - 2x_0 \Leftrightarrow 2x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0$. $\Delta = 16 - 4\times 2 \times(-4) = 48$. $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes. Il existe donc deux tangentes à la courbe $\mathcal{C}_g$ qui passent par le point A.

Exercice 3 :

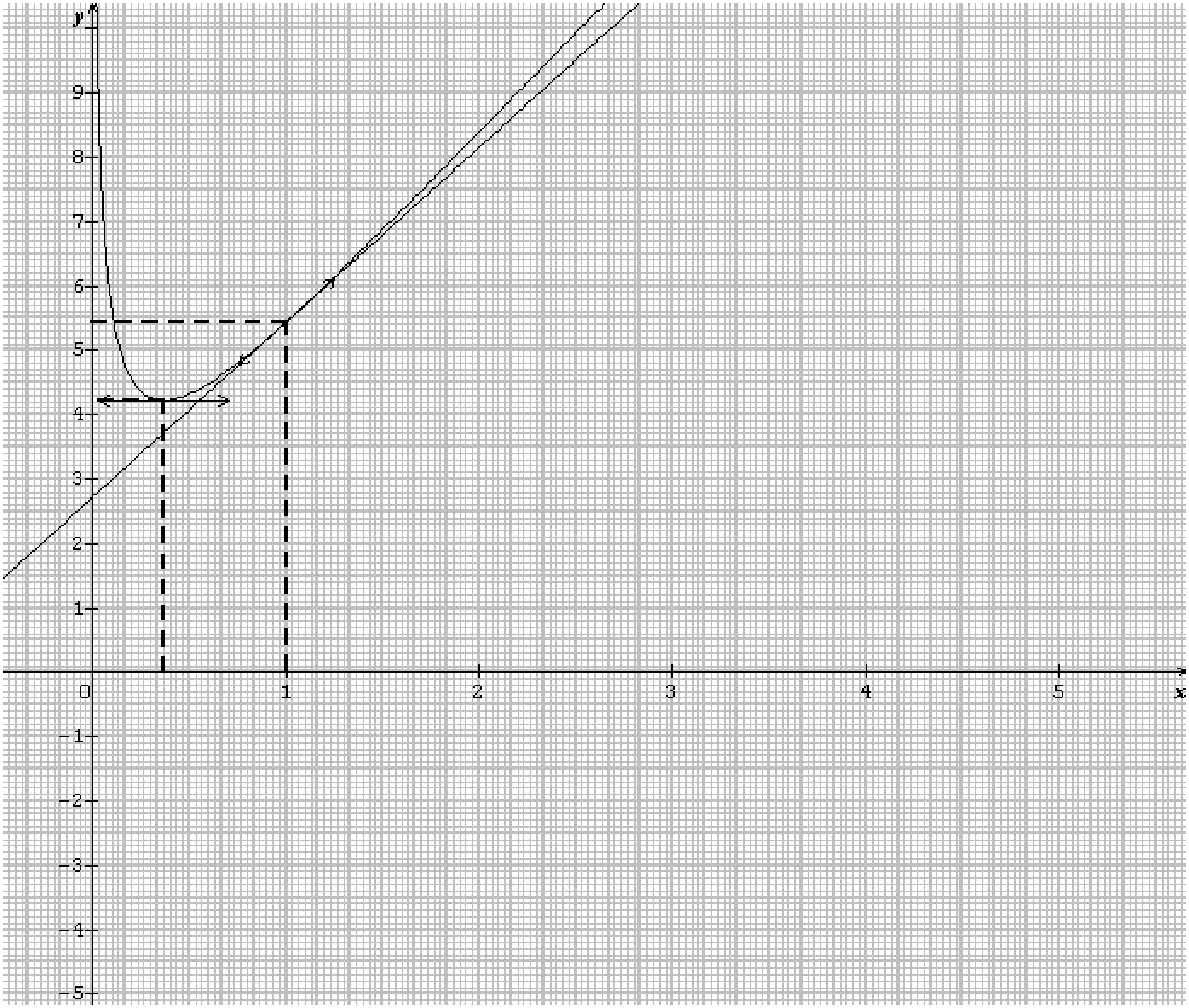
$h(x\,;\,y\,;\,z) = 4x^3 y + 3xe^{-3y}\sqrt{y^2+1}$.
$h'_x(x\,;\,y\,;\,z) = 12x^2 y + 3e^{-3y}\sqrt{y^2+1}$
$h'_y(x\,;\,y\,;\,z) = 4x^3 + 3x\left(-3e^{-3y}\sqrt{y^2+1} + e^{-3y}\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}\right) = 4x^3 - 9xe^{-3y}\sqrt{y^2+1} + \dfrac{6xye^{-3y}}{2\sqrt{y^2+1}}$
$h'_z(x\,;\,y\,;\,z) = 0$

Exercice 4 :

● *gof* : pour tout $x \in D_f$, $f(x) = (2x; x-1)$. Donc $f(x) \in \mathbb{R}^2$ soit $f(x) \in D_g$ donc *gof* est définie.
$gof(x) = g(f(x)) = g(2x; x-1) = (x-1; 0)$.
$gof: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$\quad x \mapsto (x-1; 0)$
● *fog* : pour tout $(x; y) \in D_g$, $g(x; y) = (y; 0)$. Donc $g(x; y) \in \mathbb{R}^2$ soit $g(x; y) \notin D_f$ donc *fog* n'est pas définie.

Exercice 5 :

La correction a été donnée en TD (à peu de choses près) ! ! !
… sauf la courbe (voir au verso).


y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
x
−1
−2
−3
−4
−5