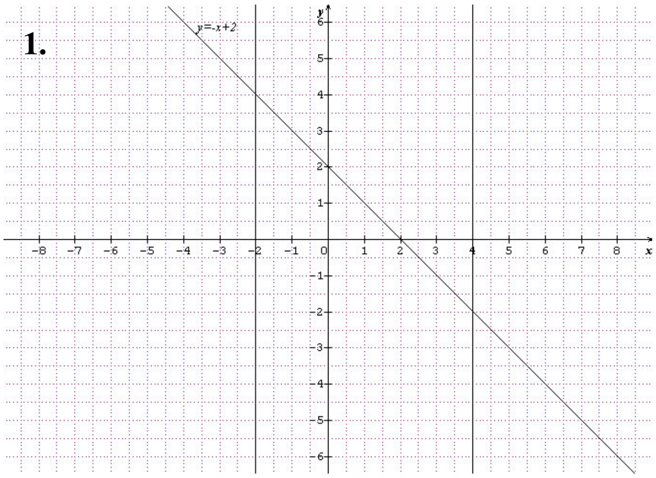
CORRECTION DU CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUES DU 18/12/2003

Exercice 1 :

1.



F est la partie du plan non hachurée.

2. $\mathrm{Im}(\{5\}) = \left]-\infty;-3\right]$

Les antécédents de –4 sont $\left]-\infty;6\right]$

Exercice 2 :

1. f est une fonction à trois variables (de $\mathbb{R}^3$ dans R).

2. $f'_x(x;y;z) = 15x^4y + \dfrac{1}{x} + 5$ $\qquad f'_y(x;y;z) = 3x^5 - \dfrac{1}{y}$ $\qquad f'_z(x;y;z) = 0$

Exercice 3 :

1. La fonction f est définie sur R car pour tout x de R, $e^x > 0$ donc $e^x + 4 \neq 0$.
Soit y donné dans R. tel que $y = f(x)$. Si x existe et est unique, alors f sera bijective.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2e^x+5}{e^x+4} \Leftrightarrow y(e^x+4) = 2e^x+5 \Leftrightarrow ye^x+4y = 2e^x+5 \Leftrightarrow e^x(y-2) = 5-4y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{5-4y}{y-2} \text{ et } y \neq 2 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5-4y}{y-2}\right) \text{ et } \frac{5-4y}{y-2} > 0 \text{. Or } \frac{5-4y}{y-2} > 0 \text{ si } y \in \left]\frac{5}{4}\,;\,2\right[.$$

Donc f est bijective de R sur $\left]\frac{5}{4}\,;\,2\right[$ et $f^{-1} : \left]\frac{5}{4}\,;\,2\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longrightarrow \ln\left(\frac{5-4y}{y-2}\right)$$

2. $f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \circ g\ (x) = f(g(x)) = f(x+4y) = \dfrac{2e^{x+4y}+5}{e^{x+4y}+4}$

$g \circ f$ n'est pas définie car Im f n'est pas contenu dans Def g.

Exercice 4 :

1. $h(x)$ défini si et seulement si $2e^x - 1 \neq 0$ soit $e^x \neq 1$ soit $x \neq \ln\frac{1}{2}$. Donc $D_h = \mathbb{R} - \left\{\ln\frac{1}{2}\right\}$.

2. $-8+16\dfrac{e^x}{2e^x-1} = \dfrac{-8(2e^x-1)}{2e^x-1} + \dfrac{16e^x}{2e^x-1} = \dfrac{-16e^x+8+16e^x}{2e^x-1} = \dfrac{8}{2e^x-1} = h(x)$

3. $h(x) = -8+16\dfrac{e^x}{2e^x-1} = -8+8\times\dfrac{2e^x}{2e^x-1} = -8+8\times\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2e^x-1$. Donc $H(x) = -8x + 8\ln(2e^x-1)$

Exercice 5 :

Partie A :

1. $\lim\limits_{x\to -} (x+1)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -} e^{-x} = +\infty$
donc $\lim\limits_{x\to -} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +} (x+1)^2 e^{-x} = \lim\limits_{x\to +} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to +} \dfrac{x^2}{e^x} = 0^+$

car $\lim\limits_{x\to +} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ *(croissances comparées)*

2. f est dérivable pour tout x de R.
$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2 \times (-e^{-x}) = (x+1)e^{-x}(2-(x+1)) = (x+1)e^{-x}(1-x) = (1-x^2)e^{-x}$.

3. L'équation de la tangente en 0 est : $y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
$f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ donc l'équation devient $y - 1 = x$ soit $y = x+1$

4. $e^{-x} > 0$ pour tout x de R. les valeurs qui annulent $1-x^2$ (et donc $f'(x)$) sont 1 et –1
et $1-x^2$ >0 pour $x \in]-1\ ;\ 1[$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

$f(-1) = 0$

$f(1) = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$

5. $f(1) = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e} > 1$ et $f(3) = 16e^{-3} = \dfrac{16}{e^3} \approx 0{,}8 < 1$.

F est continue et strictement décroissante sur [1 ; 3]. $f([1\ ;\ 3]) = \left[\dfrac{16}{e^3}\ ;\ \dfrac{4}{e}\right]$ et $1 \in \left[\dfrac{16}{e^3}\ ;\ \dfrac{4}{e}\right]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [1 ; 3].

PARTIE B :

1. Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $e^{-x} > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ donc $f(x) > 0$.

2. $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ | $g(1) = \dfrac{1}{f(1)} = \dfrac{1}{4e^{-1}} = \dfrac{e}{4}$ | $g(x_0) = \dfrac{1}{f(x_0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ (voir partie **A** question **5**)

3. $\lim\limits_{x\to +} g(x) = \lim\limits_{x\to +} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +} f(x) = 0^+$

4. $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $f(x) > 0$ donc lorsque f croît, g décroît et inversement. D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-		+	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\dfrac{e}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

PARTIE C :

1. F' $(x) = (-2x-4)e^{-x} + (-x^2-4x-5)(-e^{-x}) = (-2x-4+x^2+4x+5)e^{-x} = (x^2+2x+1)e^{-x} = (x+1)^2 e^{-x} = f(x)$
donc F est une primitive de f sur R.

2. $\mathcal{a} = \int_0^2 f(x)dx = [\mathrm{F}(x)]_0^2 = [(-x^2-4x-5)e^{-x}]_0^2 = (-4-8-5)e^{-2} - (-5) = -17e^{-2} + 5$ u.a. (1 u.a. = 4 cm²)

Donc $\mathcal{a} = 4(-17e^{-2}+5) = -\dfrac{68}{e^2} + 20$ cm² (valeur exacte) soit $\mathcal{a} \approx 10{,}80$ cm² (valeur approchée à 10^{-2} près).