Exercices corrigés de statistiques inférentielles – Tests d'hypothèses

Exercice 1 *Tests classiques – Probabilité critique*

Dans un centre de renseignements téléphoniques, une étude statistique a montré que l'attente (en secondes) avant que la communication soit amorcée suit une loi normale de moyenne 18 et d'écart-type 7,2.

Après une réorganisation du service une étude est effectuée pour contrôler s'il y a eu une amélioration du temps d'attente.

Attente	2 – 6	6 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 18	18 – 26	26 – 34
Effectif	8	14	9	11	30	16	12

1. Construire un test permettant de décider si le temps d'attente a diminué depuis la réorganisation du service (seuil de risque de 2%).
2. Calculer la probabilité critique liée à ce test.
3. Conclure à l'aide du sondage effectué.

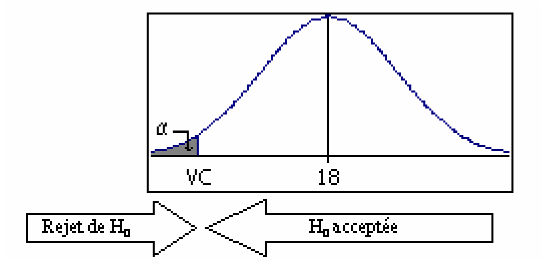
Solution

1. On pose les hypothèses nulle et alternative sachant que α = 2%:

H_0 : le temps d'attente n'a pas changé, m = 18.

H_1 : le temps d'attente à diminué, m $<$ 18.

Sous H_0, $\overline{X}$ la variable aléatoire égale au temps d'attente sur tout échantillon de taille 100 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(18 ; \frac{7,2}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(18 ; 0,72)$.



Pg Préc.   Pg Suiv.

Sous H_0, on cherche la valeur de a telle que $P(\overline{X} \geq 18 - a) = 0{,}98$ ce qui équivaut, en posant $T = \dfrac{\overline{X} - 18}{0{,}72}$ où T suit la loi normale centrée réduite, à $P(T \geq \dfrac{-a}{0{,}72}) = 0{,}98$ soit par symétrie de la loi normale $P(T \leq \dfrac{a}{0{,}72}) = 0{,}98$.

Donc, par lecture inverse sur la table de la loi normale centrée réduite et interpolation linéaire on obtient : $\dfrac{a}{0{,}72} = 2{,}055$ donc $a = 1{,}48$.

Ainsi on peut énoncer la règle de décision :

- Si me $\geq$ 16,52 alors on accepte H_0 avec un risque β inconnu.
- Si me $<$ 16,52 on rejette H_0 donc on accepte H_1 avec une probabilité de risque α = 2%.

2. Ici, la probabilité critique vaut $P(\overline{X} \geq m_e)$ où $m_e = 15{,}78$ sous H_0.

$P(\overline{X} \leq 15{,}78) = P(T \leq -3{,}08) = P(T \geq 3{,}08) = 1 - P(T < 3{,}08) = 1 - 0{,}998962 = 0{,}001038$ (par interpolation linéaire).

La probabilité critique vaut ici à peu près 0,1%.

3. Pour conclure, on peut procéder de deux façons :

- A l'aide des tests classiques : comme $m_e = 15{,}78 < 16{,}52$ on rejette H_0 et donc il y a une diminution du temps d'attente au risque 2%.
- A l'aide de la probabilité critique : comme $\alpha = 2\% > pc = 0{,}1\%$ on rejette H_0 et donc il y a une diminution du temps d'attente.

Exercice 2 *Tests classiques – Erreurs de 1ère et 2ème espèce*

Une entreprise fabrique pour l'industrie, des pièces en sous-traitance.

La direction décide de mettre en place une politique de recherche de qualité. Pour ce faire, toutes les machines ont été systématiquement révisées et on a défini une nouvelle organisation dans l'atelier : les tâches de contrôle sont réparties à chaque étape du processus de fabrication et le taux de pièces défectueuses est tombé à 1%.

Quelques mois plus tard, une opération de contrôle est effectuée pour vérifier si la norme de 1% (hypothèse nulle) de pièces défectueuses reste valable. Sur les 5 000 pièces contrôlées 100 s'avèrent défectueuses, soit 2% (hypothèse alternative).

Le chef d'entreprise décide que si l'hypothèse nulle est vérifiée, il ne modifiera plus son processus de production (décision D_0) et au contraire, si c'est l'hypothèse alternative, il entreprendra une action de sensibilisation des salariés de cet atelier au problème de la qualité (décision D_1).

Pour choisir entre ces deux hypothèses, il tire un échantillon de 1 500 pièces.

1. Si le chef d'entreprise se fixe un risque de 1% d'entreprendre une action de sensibilisation des salariés à tort, formuler la règle de décision du test unilatéral.
2. Si dans l'échantillon prélevé, le nombre de pièces défectueuses est 18, quelle sera la décision du chef d'entreprise : devra-t-il entreprendre une action de formation ?
3. Calculer alors le risque de l'acheteur, c'est-à-dire ne pas modifier le processus de production alors qu'on le devrait. Comment s'appelle ce risque ?

Pg Préc.   Pg Suiv.

Solution

1. On pose les hypothèses nulle et alternative :

H_0 : le taux de pièces défectueuses est de 1% ; p = 1%.

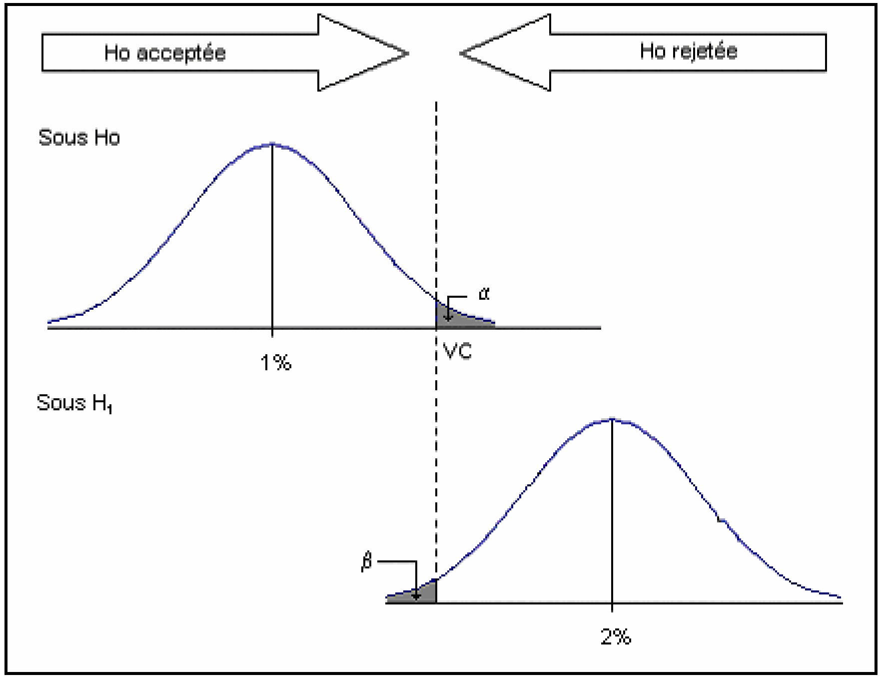
H_1 : le taux de pièces défectueuses est de 2% ; p = 2%.

De plus le risque défini par le chef d'entreprise est le risque de 1$^{\text{ère}}$ espèce donc α = 1%.

Soit F la variable aléatoire égale à la proportion de pièces défectueuses sur tout échantillon de taille 1500.

Sous H_0 :

Comme $n \geq 30$, F suit approximativement $\mathcal{N}(0{,}01 ; \sqrt{\dfrac{0{,}01 \times 0{,}99}{1500}}) = \mathcal{N}(0{,}01 ; 0{,}00257)$.



On cherche la valeur de a telle que : $P(F \leq 0{,}01 + a) = 0{,}99$.

On pose $T = \dfrac{F - 0{,}01}{0{,}00257}$ et T suit la loi normale centrée réduite.

$P(T \leq \dfrac{a}{0{,}00257}) = 0{,}99$ donc par lecture inverse sur la table de la loi normale centrée réduite on a : $a = 0{,}00257 \times 2{,}33 = 0{,}006$.

<u>Règle de décision</u> :

- Si $f_e > 1{,}6\%$ on rejette H_0 avec un risque de se tromper de 1%
- Si $f_e \leq 1{,}6\%$ on accepte H_0.

2. Sur l'échantillon $f_e = 1{,}2\%$ donc on accepte H_0.

3. Il faut calculer le risque de 2ème espèce β.

Sous l'hypothèse H_1, F suit la loi normale $\mathcal{N}(0{,}02 ; \sqrt{\dfrac{0{,}02 \times 0{,}98}{1500}}) = \mathcal{N}(0{,}02 ; 0{,}00361)$.

On a $\beta = P(F \leq 0{,}016) = P(T \leq -1{,}11) = 1 - P(T < 1{,}11) = 1 - 0{,}8665 = 0{,}1335$.

Donc le risque de 2ème espèce vaut 13,35%.

Pg Préc. Pg Suiv.

Exercice 3 *Tests du χ^2*

On étudie sur un échantillon de 100 contacts, le temps d'attente (en secondes) avant que la communication soit amorcée, dans un centre de renseignements téléphoniques.

Attente	2 – 6	6 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 18	18 – 26	26 – 34
Effectif	8	14	9	11	30	16	12

La distribution peut-elle être considérée comme normale ?

Solution

On commence par calculer les paramètres de l'échantillon : $m_e = 15{,}78$ et $\sigma_e = 7{,}2768$ donc la déviation standard vaut $s = 7{,}3134$.
On pose :

- H_0 le d'attente suit une loi normale $\mathcal{N}(15{,}78 ; 7{,}3134)$.
- H_1 le temps d'attente ne suit pas la loi normale $\mathcal{N}(15{,}78 ; 7{,}3134)$.

On suppose H_0 vraie et on calcule les effectifs théoriques :

Attente	≤ 6	6 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 18	18 – 26	≥ 26
O_i	8	14	9	11	30	16	12
T_i	9,01	12,47	8,67	10,37	21,27	30,13	8,08
$\frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$	0,1132	0,1877	0,0126	0,0383	3,5831	6,6265	1,9018

On a donc $\chi^2_{cal} = \sum \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i} = 12{,}4632$. Ici le degré de liberté est : $7 - 1 - 2 = 4$ car deux paramètres ont été estimés sur l'échantillon.

En prenant un risque de 5% on obtient par lecture sur la table du χ^2 : $\chi^2_{0,05} = 9{,}49$.

Comme $\chi^2_{cal} > \chi^2_{0,05}$ on rejette H_0 au risque 5%.