TESTS D'HYPOTHESES

Version 1.1 - 11/05

- **Outils de navigation**

Affiche la page précédente

Affiche la boîte de dialogue "Recherches"

Affiche la page suivante

Affiche la page d'accueil (permet de changer de cours)

Affiche le plan du cours

- **Restrictions**

Ce cours interactif est prévu pour une utilisation sur machine (en ligne ou sur Cd-rom). Il n'est donc pas possible de lancer une impression à partir du cours. Le cours imprimable permet de conserver une trace papier, il doit être complété à l'aide du cours interactif.

Il n'est pas possible de modifier une partie du cours ou les commentaires, seuls les champs des exercices peuvent être remplis mais ils ne seront pas conservés lors d'une utilisation future.

Il n'est pas possible de copier le cours ou toute partie (graphiques, tableaux, vidéos …).

Pré-requis indispensables pour ce cours :

- Le cours sur l'estimation

iutenligne.net

Commencer le cours ...

Cours imprimable

Exercices corrigés

Tables statistiques

Q.C.M.

TESTS D'HYPOTHESES

1. Tests classiques

Test bilatéral

Un ancien procédé de fabrication d'écrans plats produit des écrans dont la durée de vie suit une loi normale de moyenne 10000 h et d'écart-type 1200 h.
Un nouveau procédé est mis en place sur une autre chaîne. On admet que la durée de vie suit aussi une loi normale. Sur un échantillon de 100 écrans issus de cette nouvelle chaîne, la durée de vie moyenne est de 10300 h.

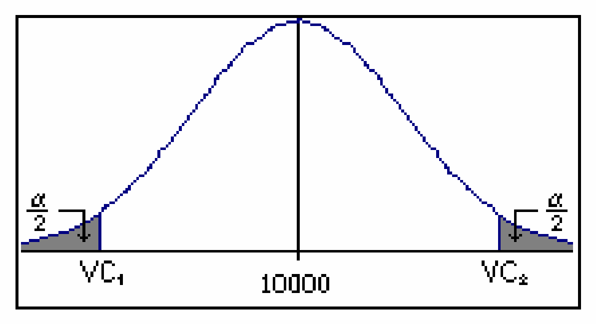
La question posée est : ce nouveau procédé est-il différent de l'ancien, en terme de durée de vie moyenne des écrans ?

On commence par préciser la taille de l'échantillon sur lequel le test va être construit (ici 100) puis

- On pose tout d'abord une hypothèse H_0, appelée hypothèse nulle , qui est que le nouveau procédé est identique à l'ancien donc m = 10000
- On pose ensuite une hypothèse H_1, appelée hypothèse alternative, qui est que le nouveau procédé est différent de l'ancien donc $m \neq 10000$.
- On choisit un seuil d'erreur du test (le risque) que l'on note α, ici $\alpha = 0{,}05$.

On suppose alors provisoirement que l'hypothèse nulle est vraie. Il s'agit alors de donner un domaine de validité [VC1 ; VC2] pour notre hypothèse ou plus exactement le complémentaire de ce domaine appelé *région critique*.

Sous H0



Rejet de H_0 | H_0 acceptée | Rejet de H_0

TESTS D'HYPOTHESES

1. Tests classiques

Comme H_0 est supposée vraie, la variable aléatoire $\overline{X}$ égale à la durée de vie des écrans de l'échantillon suit la loi normale $\mathcal{N}(10000 ; \frac{1200}{\sqrt{100}}) = \mathcal{N}(10000 ; 120)$.

Pour notre seuil d'erreur le test signifie :

$P(10000 - a \leq \overline{X} \leq 10000 + a) = 0{,}95$.

On pose $T = \frac{\overline{X} - 10000}{120}$ qui suit alors la loi normale $\mathcal{N}(0 ;1)$

$P(-\frac{a}{120} \leq T \leq \frac{a}{120}) = 0{,}95$ donc $a = 1{,}96 \times 120 = 235{,}2$.

En conclusion, si pour un échantillon donné, la moyenne de l'échantillon m_e, est dans l'intervalle $[10000 - 235{,}2 ; 10000 + 235{,}2] = [9764{,}8 ; 10235{,}2]$ alors on accepte H_0 sinon on rejette H_0, c'est à dire qu'on accepte H_1.

Pour notre échantillon de tubes issus de la nouvelle chaîne $m_e = 10300$, on conclut donc qu'il y a bien une différence (H_1 acceptée).

⊙ Test unilatéral

Souvent, on veut s'assurer qu'un procédé est meilleur qu'un autre (ou pire etc.). On utilise alors un test unilatéral.

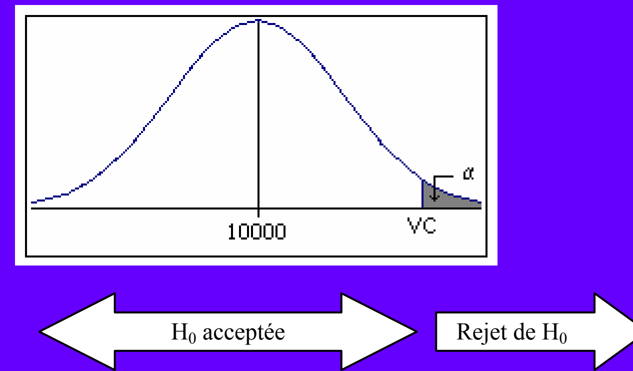
En reprenant l'exemple ci-dessus, la question que l'on peut se poser est de savoir si le nouveau procédé est meilleur que l'ancien. Pour cela :

- H_0 : le nouveau procédé est identique à l'ancien donc m ______ 10000.
- H_1 : le nouveau procédé est meilleur que l'ancien donc m ______ 10000.
- On choisit $\alpha = 0{,}05$.

Valider

1. Tests classiques

Sous H0



Exercices interactifs

Comme H_0 est supposée vraie, la variable aléatoire $\overline{X}$ égale à la durée de vie des écrans de l'échantillon suit la loi normale $\mathcal{N}(10000 ; 120)$.

Pour notre seuil d'erreur le test signifie :

$P(\overline{X} \leq 10000 + a) = 0,95$.

On pose $T = \dfrac{\overline{X} - 10000}{120}$ qui suit alors la loi normale $\mathcal{N}(0 ;1)$

$P(T \leq \dfrac{a}{120}) = 0,95$ donc $a = 1,65 \times 120 = 198$.

En conclusion, si pour un échantillon donné, la moyenne de l'échantillon m_e, est inférieure à $10000 + 198 = 10198$ alors on accepte H_0 sinon on rejette H_0, c'est à dire qu'on accepte H_1.

Pour notre échantillon d'écrans issus de la nouvelle chaîne $m_e = 10300$, on conclut donc que le nouveau procédé est meilleur (H_1 acceptée).

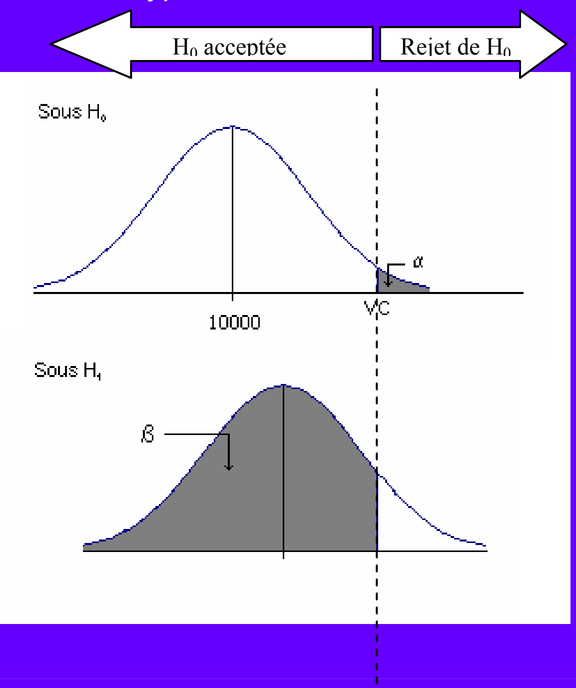
2. Erreurs de 1ère et de 2ème espèce

Lors de la prise de décision, on prend le risque de commettre une erreur que l'on choisit au départ, c'est α le seuil d'erreur du test. Ce risque est celui de rejeter à tort H_0 qui est vraie.
Mais il y a un autre type d'erreur que l'on peut commettre, c'est d'accepter H_0 à tort.

En fait rejeter H_0 alors que H_0 est vraie c'est commettre une erreur de 1ère espèce, de probabilité α et accepter à tort H_0 (c'est à dire si H_1 est vraie) c'est commettre une erreur de 2ème espèce, de probabilité β.

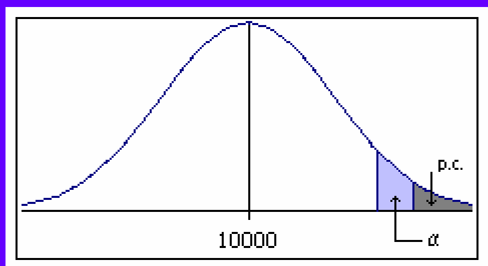
Décision $\rightarrow$	H_0 acceptée	H_0 rejetée
H_0 est vraie	Décision correcte Probabilité $1 - \alpha$	Erreur 1ère espèce Probabilité α
H_1 est vraie	Erreur de 2ème espèce Probabilité β	Décision correcte Probabilité $1 - \beta$

Graphiquement, il est possible de représenter "l'état du monde" sous H_0 et "l'état du monde" sous H_1 et de voir apparaître les deux types d'erreurs :



TESTS D'HYPOTHESES

3. Probabilité critique



Il peut sembler arbitraire de fixer, à priori, le seuil de risque (erreur de 1ère espèce α) du test. En effet, il est préférable, dans bien des cas, de se forger sa propre opinion sur le rejet hypothétique de l'hypothèse H_0. C'est le rôle de la probabilité critique.

Pour calculer la probabilité critique, on utilise l'hypothèse nulle H_0 et on regarde dans quelle mesure elle est compatible avec les données sur notre échantillon.

Reprenons notre exemple : $n = 100$ et $m_e = 10300$

- H_0 : le nouveau procédé est identique à l'ancien donc $m = 10000$.
- H_1 : le nouveau procédé est meilleur que l'ancien donc $m > 10000$.

Si H_0 est vraie, quelle est la probabilité que $\overline{X} \geq 10300$?

$\overline{X}$ suit la loi $\mathcal{N}(10000\ ;\ 120)$ donc :

$P(\overline{X} \geq 10300) = P(T \geq 2,5) = 1 - P(T < 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$.

Cela signifie que sous l'hypothèse H_0, il n'y a que 0,62% de chance d'observer une moyenne aussi élevée. Ce 0,62% est appelé probabilité critique (unilatérale) pour H_0.

La probabilité critique résume donc le degré de concordance entre les données de l'échantillon et l'hypothèse H_0.

Pour conclure, lorsque l'on connaît la probabilité critique associée à une hypothèse H_0, il est facile de conclure lors d'un test classique. Si la probabilité critique est inférieure au seuil de risque α du test alors l'hypothèse H_0 est à rejeter.

TESTS D'HYPOTHESES

4. Test du χ^2 (Khi-deux)

On utilise le test du χ^2 dans deux cas de figure :

- Pour tester si une distribution suit une distribution théorique connue.
- Pour tester l'indépendance de deux variables.

Le test du χ^2 est basé sur la comparaison entre les effectifs observés et les effectifs théoriques, obtenus en supposant l'hypothèse que la distribution est connue. En d'autre termes de combien l'effectif observé s'écarte-t-il de l'effectif théorique ?

Exemple :

Pour étudier l'influence, éventuelle, de la couleur de l'emballage sur un nouveau produit cosmétique, une entreprise a procédé à une étude sur un échantillon de 200 ménages. On a remis à chacun d'eux quatre produits identiques dans des boîtes de couleurs différentes en leur laissant supposer que les produits étaient différents. Après utilisation des produits, on a demandé aux différents ménages leur préférence :

Couleur	Rouge	Blanc	Bleu	Vert
Effectif	51	74	30	45

Le problème est de savoir si la couleur de l'emballage a de l'importance ?

Nous allons utiliser le test du χ^2 pour tester l'hypothèse, H_0, selon laquelle l'emballage n'a pas d'importance.

Si on suppose H_0 vraie, l'effectif de chaque couleur doit être identique (loi uniforme discrète) et égal à ______ . Solution

On peut donc former le tableau suivant :

TESTS D'HYPOTHESES

4. Test du χ^2

Couleur	Rouge	Blanc	Bleu	Vert
Effectif observé O_i	51	74	30	45
Effectif théorique T_i	50	50	50	50
$O_i - T_i$	1	24	-20	-5
$(O_i - T_i)^2$	1	576	400	25
$(O_i - T_i)^2 / T_i$	0,02	11,52	8	0,5

Le test du χ^2 consiste à mesurer les écarts entre les effectifs observés et les effectifs théoriques et à les comparer aux effectifs théoriques. On note : $\chi^2_{cal} = \sum \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$.

Ici $\chi^2_{cal} = 0{,}02 + 11{,}52 + 8 + 0{,}5 = 20{,}04$.

Une valeur élevée du χ^2_{cal} traduit un écart important par rapport à la distribution théorique, donc une crédibilité moindre pour H_0. Les valeurs limites de ces écarts sont données dans la table de la loi du χ^2, qui nous permet de conclure (pour peu que l'on ait choisi un risque α) :

- Si $\chi^2_{cal} > \chi^2_\alpha$ alors on rejette H_0 avec une probabilité α de se tromper.
- Si $\chi^2_{cal} < \chi^2_\alpha$ alors on ne rejette pas H_0, donc on l'accepte.

Pour pouvoir lire sur la table du χ^2 la valeur de χ^2_α, il nous faut déterminer le degré de liberté (d.d.l.) c'est à dire le nombre minimal d'informations nécessaires pour conclure.

Ici, sur les 4 modalités (appelées aussi classes) prises par la couleur, la connaissance de l'effectif de 3 classes permet de déterminer la quatrième sachant que l'effectif total est 200. Donc le d.d.l. vaut $\nu = 4 - 1 = 3$.

Par lecture sur la table du χ^2 on a :

$\chi^2_{cal} = 20{,}04 > \chi^2_{0,001} = 16{,}27$ donc on rejette l'hypothèse selon laquelle la couleur n'influe pas sur le choix du produit avec moins de 0,1 % de risque d'erreur.

Remarque : ce test nécessite qu'aucun effectif théorique soit inférieur à 5. Dans le cas contraire, on procède à des regroupements de classes.

4. Test du χ^2

Le test du χ^2 peut aussi être utilisé pour tester l'indépendance de deux variables.

Exemple :

On demande à 200 personnes (100 du type H et 100 du type F) dans quelle tranche se trouve leur salaire.

	500 – 1000	1000 – 1500	1500 – 2000	2000 – 2500
Type H	20	30	40	10
Type F	25	40	30	5

Le salaire est-il indépendant du type des personnes ?

Là aussi, nous allons utiliser le test du χ^2 pour conclure. La démarche est la même que pour l'exemple précédent, avec cette fois-ci un tableau à double entrée.

On suppose que l'hypothèse H_0, comme quoi le salaire est indépendant du type des personnes, est vraie.

	500 – 1000	1000 – 1500	1500 – 2000	2000 – 2500	$n_{i\bullet}$
Type H	20	30	40	10	100
Type F	25	40	30	5	100
$n_{\bullet j}$	45	70	70	15	200

On forme alors le tableau des effectifs théoriques :

	500 – 1000	1000 – 1500	1500 – 2000	2000 – 2500
Type H	22,5	35	35	7,5
Type F	22,5	35	35	7,5

4. Test du χ^2

On calcul les écarts $(O_i - T_i)$:

-2,5	-5	5	2,5
2,5	5	-5	-2,5

Puis $(O_i - T_i)^2 / T_i$:

0,28	0,71	0,71	0,83
0,28	0,71	0,71	0,83

Puis on fait la somme : $\chi^2_{cal} = (0{,}28 \times 2) + (0{,}71 \times 4) + (0{,}83 \times 2) = 5{,}06$.

Reste à trouver le nombre de degrés de liberté. Ici, comme on connaît les effectifs totaux par ligne, il suffit de connaître (nombre de colonnes – 1) valeurs par ligne pour les connaître toutes. Et comme on connaît les effectifs totaux par colonne, il suffit de connaître (nombre de lignes – 1) valeurs par colonne.

	500 – 1000	1000 – 1500	1500 – 2000	2000 – 2500	$n_{i\bullet}$
Type H	20	30	40	?	100
Type F	?	?	?	?	100
$n_{\bullet j}$	45	70	70	15	200

Donc le d.d.l. vaut (nombre de lignes –1) $\times$ (nombre de colonnes –1).

Ici $\nu = 3$.

Par lecture sur la table $\chi^2_{0,05} = 7{,}81$.

Comme $\chi^2_{cal} = 5{,}06 < \chi^2_{0,05} = 7{,}81$ on ne rejette pas l'hypothèse H_0.

On accepte donc l'hypothèse selon laquelle Il n'y a pas de différence de salaire entre les deux types, avec un risque de 2ème espèce inconnu.