Millaud Johan
IUT du Limousin

Octobre 2004
Département Génie Civil

Evaluation sommative

Introduction à la réduction des endomorphismes
Module de cours proposé à IUTenLigne
Durée conseillée : 2h00

Le sujet est composé de deux exercices dont on donnera les réponses directement sur ce document et d'un exercice dont la solution doit être rédigée.

Exercice 1

Dans cet exercice, on travaille dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, et $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont les vecteurs de E dont les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad , \quad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1. Le vecteur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$? Si oui, donner une relation entre le vecteur $\vec{u}_1$ et les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

   ☐ non ☐ oui, relation : ☐

2. Le vecteur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$? Si oui, donner une relation entre le vecteur $\vec{u}_1$ et les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

   ☐ non ☐ oui, relation : ☐

3. La famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de E .

   ☐ vrai ☐ faux

4. La famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une base de E .

   ☐ vrai ☐ faux

5. La dimension du plan vectoriel $\mathcal{P}$ engendré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ est :

   ☐ $\dim \mathcal{P} = 1$ ☐ $\dim \mathcal{P} = 2$ ☐ $\dim \mathcal{P} = 3$

6. Donner une équation cartésienne, par rapport à la base $\mathcal{B}$, du plan $\mathcal{P}$ engendré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

   équation : ☐

7. Le système $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 3y - z = 0 \end{array} \right.$ correspond-il au système d'équations cartésiennes, par rapport à la base $\mathcal{B}$, d'une droite vectorielle de E ? Si oui, donner un vecteur directeur de cette droite.

☐ non ☐ oui, vecteur directeur : $\boxed{\vec{u}_3 \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$

8. L'équation $y + 3x = 0$ correspond-elle à une équation cartésienne, par rapport à la base $\mathcal{B}$, de droite vectorielle de E ? Si oui, donner un vecteur directeur de cette droite.

☐ non ☐ oui, vecteur directeur : $\boxed{\vec{u}_4 \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$

Exercice 2

Dans cet exercice, on travaille dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, et $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont les vecteurs de E dont les coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad , \quad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

De plus, on considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(\vec{\imath}) = -\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} - 13\vec{k} \quad , \quad f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + 4\vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

1. La matrice A représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

☐ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -13 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

☐ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ -13 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

2. L'image par f du vecteur $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ est :

☐ $f(\vec{v}_1) \begin{pmatrix} 5 \\ -29 \\ -20 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ☐ $f(\vec{v}_1) \begin{pmatrix} -6 \\ 29 \\ -59 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ☐ $f(\vec{v}_1) \begin{pmatrix} 56 \\ -13 \\ -23 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

☐ $f(\vec{v}_1) \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ☐ $f(\vec{v}_1) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ☐ $f(\vec{v}_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

3. Le vecteur $\vec{e}_1$ est-il un vecteur propre de f ? Si oui, pour quelle valeur propre ?

   ☐ non ☐ oui, valeur propre : $\lambda_1 =$

4. Le vecteur $\vec{e}_2$ est-il un vecteur propre de f ? Si oui, pour quelle valeur propre ?

   ☐ non ☐ oui, valeur propre : $\lambda_2 =$

5. Le vecteur $\vec{e}_3$ est-il un vecteur propre de f ? Si oui, pour quelle valeur propre ?

   ☐ non ☐ oui, valeur propre : $\lambda_3 =$

6. Calculer le polynôme caractéristique de f et le donner sous forme **factorisée**.

   $P_f(\lambda) =$

7. La famille $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de E, car son déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ est :

   $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3) =$

8. La matrice A' représentant f par rapport à la base $\mathcal{B}'$ est :

   ☐ $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & -3 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   ☐ $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est :

   ☐ $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & -3 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   ☐ $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

10. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est :

    ☐ $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & -3 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

    ☐ $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

11. Les coordonnées du vecteur $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ sont :

$\square$ $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ $\square$ $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

$\square$ $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ $\square$ $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

12. Les coordonnées du vecteur $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ sont :

$\square$ $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\square$ $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

$\square$ $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\square$ $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Exercice 3

On considère l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E défini à partir de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de E par :

$$f(\vec{i}) = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k} \quad , \quad f(\vec{j}) = 2\vec{j} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 11\vec{k}$$

Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres et écrire la matrice D représentant f par rapport à cette base.