

ELECTRICITE

Analyse des signaux et des circuits électriques

Michel Piou

Chapitre 8

Représentation graphique du comportement fréquentiel : diagramme de Bode.

Edition 11/03/2014

Table des matières

1 POURQUOI ET COMMENT ?	1
2 DIAGRAMME ASYMPTOTIQUE DES EXPRESSIONS COMPLEXE DU 1 ^{ER} ORDRE.....	2
2.1 Rappels sur la fonction \log_{10}	2
2.2 Echelle \log_{10}	3
2.3 Plan de Bode.....	4
2.4 Représentation de la fonction $\underline{A} = j\omega\tau$ ou $\underline{A} = j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$ dans le plan de Bode.....	5
2.5 Représentation de la fonction $\underline{A} = \frac{1}{j\omega\tau}$ ou $\underline{A} = \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$ dans le plan de Bode.....	6
2.6 Représentation de $\underline{A} = 1 + j\omega\tau$ ou $\underline{A} = 1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$ dans le plan de Bode.....	7
2.7 Représentation de $\underline{A} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ ou $\underline{A} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$ dans le plan de Bode.	8
2.8 Conclusion.....	9
3 EXERCICES.....	10
Chap 8. Exercice 1 : Filtrage N°1.	10
Chap 8. Exercice 2 : Filtrage N°2.	11
Chap 8. Exercice 3 : Construction d'un diagramme de Bode N°1.....	12
Chap 8. Exercice 4 : Construction d'un diagramme de Bode N°2.....	13
Chap 8. Exercice 5 : Utilisation d'un diagrammes de Bode.	14
Chap 8. Exercice 6 : Fonction AC/DC d'un oscilloscope.....	16
Chap 8. Exercice 7 : Filtrage d'un capteur de vitesse	17
4 CE QUE J'AI RETENU DU CHAPITRE « REPRESENTATION GRAPHIQUE DU COMPORTEMENT FREQUENTIEL ; DIAGRAMME DE BODE ».....	18
5 REPONSES AUX QUESTIONS DU COURS	19

Temps de travail estimé pour un apprentissage de ce chapitre en autonomie : 8 heures

Extrait de la ressource en ligne [Baselecpro](#) sur le site Internet 

Copyright : droits et obligations des utilisateurs

L'auteur ne renonce pas à sa qualité d'auteur et aux droits moraux qui s'y rapportent du fait de la publication de son document.

Les utilisateurs sont autorisés à faire un usage non commercial, personnel ou collectif, de ce document et de la ressource *Baselecpro* notamment dans les activités d'enseignement, de formation ou de loisirs. Toute ou partie de cette ressource ne doit pas faire l'objet d'une vente - en tout état de cause, une copie ne peut pas être facturée à un montant supérieur à celui de son support.

Pour tout extrait de ce document, l'utilisateur doit maintenir de façon lisible le nom de l'auteur *Michel Piou*, la référence à *Baselecpro* et au site Internet *IUT en ligne*. La diffusion de toute ou partie de la ressource *Baselecpro* sur un site internet autre que le site IUT en ligne est interdite.

Une version livre est disponible aux éditions *Ellipses* dans la collection *Technosup* sous le titre
ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE – Les lois de l'électricité

Michel PIOU - Agrégé de génie électrique – IUT de Nantes – France

Du même auteur : *MagnElecPro* (électromagnétisme/transformateur) et *PowerElecPro* (électronique de puissance)

REPRESENTATION GRAPHIQUE DU COMPORTEMENT FREQUENTIEL ; DIAGRAMME DE BODE.

1 POURQUOI ET COMMENT ?

L'utilisation des vecteurs de Fresnel et des complexes permet de calculer le comportement des réseaux électriques linéaires en régime alternatif sinusoïdal pour une pulsation donnée. Cependant il est difficile de se représenter le comportement de ce réseau lorsque la fréquence varie s'il est uniquement décrit par une expression complexe.

L'objectif des « diagrammes de Bode » est de **donner une image d'une expression complexe** en décrivant son module et son argument en fonction de la fréquence ou de la pulsation. Le type de graduations utilisées dans les diagrammes de Bode facilite grandement leur construction.

Prérequis :

La notion d'expression complexe et de logarithme en base 10.

Objectifs :

Etre capable de **lire et de construire un diagramme de Bode** décrivant le module et l'argument d'une expression complexe en fonction d'une pulsation ω . Découvrir la **notion de filtrage**.

Méthode de travail :

Après quelques rappels mathématiques, nous verrons les exemples élémentaires qui, par association, permettent de construire des exemples plus complexes. Il faudra prendre le temps de bien comprendre ces exemples.

Travail en autonomie :

Pour permettre une étude du cours de façon autonome, les réponses aux questions du cours sont données en fin de document.

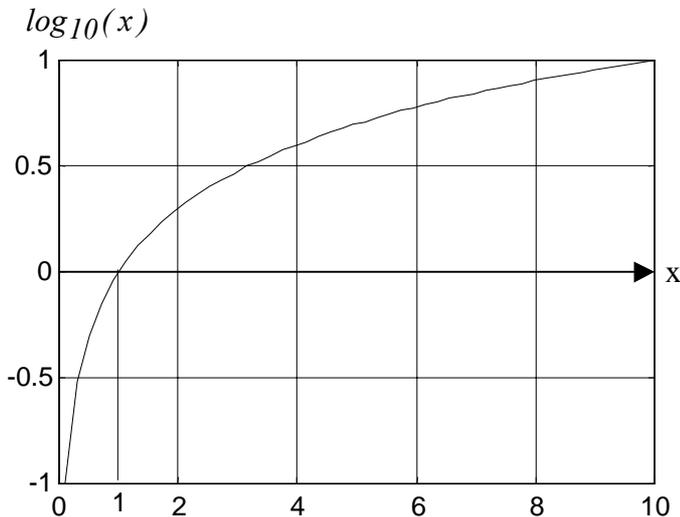
Corrigés en ligne :

Pour permettre une vérification autonome des exercices, consulter « Baselecpro » (chercher « baselecpro accueil » sur Internet avec un moteur de recherche)

2 DIAGRAMME ASYMPTOTIQUE DES EXPRESSIONS COMPLEXE DU 1^{ER} ORDRE.

Ces expressions comporteront des termes en « $a + j\omega.b$ » (1^{er} ordre), mais pas de termes en « $a + j\omega.b + (j\omega)^2.c$ » (Les expressions du 2em ordre ne seront pas traitées dans ce chapitre)

2.1 Rappels sur la fonction \log_{10} .



Cette fonction est définie sur l'intervalle $]0, \infty [$

Pour rappeler les propriétés de la fonction \log_{10} , compléter les expressions suivantes:

$$\log_{10}(a \times b) =$$

$$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) =$$

$$\log_{10}(a^b) =$$

$$\log_{10}(1) =$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{a}\right) =$$

$$\log_{10}(10) =$$

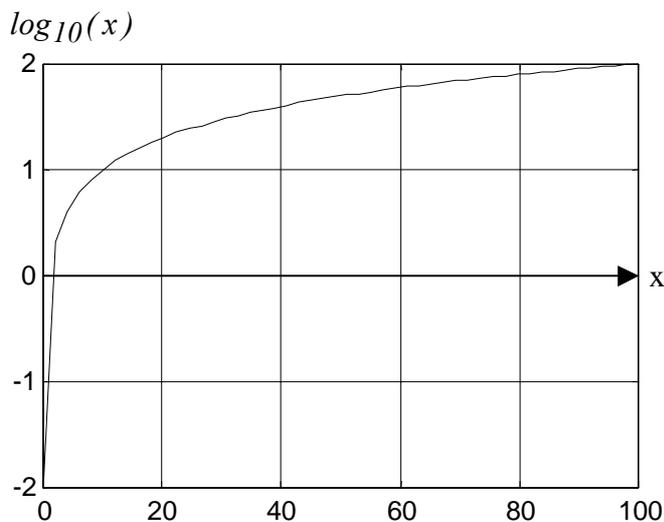
$$\log_{10}(100) =$$

$$\log_{10}(0,1) =$$

$$\log_{10}(10^n) =$$

$$\log_{10}(2) =$$

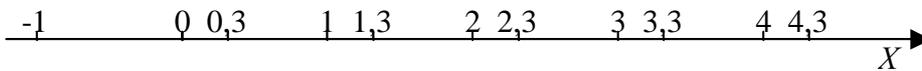
$$\log_{10}(a.10^n) =$$



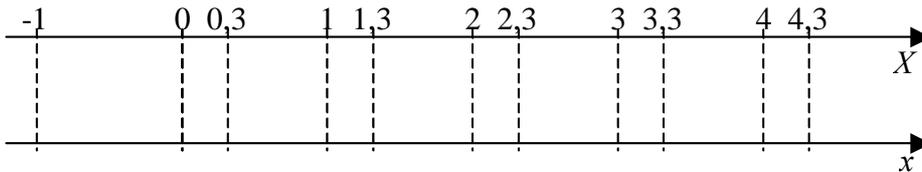
(Réponse 1:)

2.2 Echelle \log_{10}

Voici une échelle linéaire d'une grandeur X (sur une échelle linéaire, les valeurs sont réparties régulièrement) :



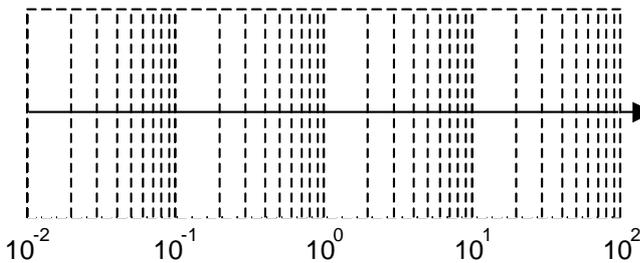
Posons $X = \log_{10}(x)$, indiquer, sur la seconde échelle, la valeur de x correspondant à chaque valeur de X .



(Réponse 2:)

Les valeurs de x ne sont pas réparties régulièrement. L'écart entre les faibles valeurs est dilaté, alors que l'écart entre les fortes valeurs est contracté. On appelle ce type de graduations une **échelle logarithmique**.

On retiendra : Porter des valeurs d'un paramètre x sur une échelle logarithmique est équivalent à porter des valeurs du paramètre $X = \log_{10}(x)$ sur une échelle linéaire correspondante.



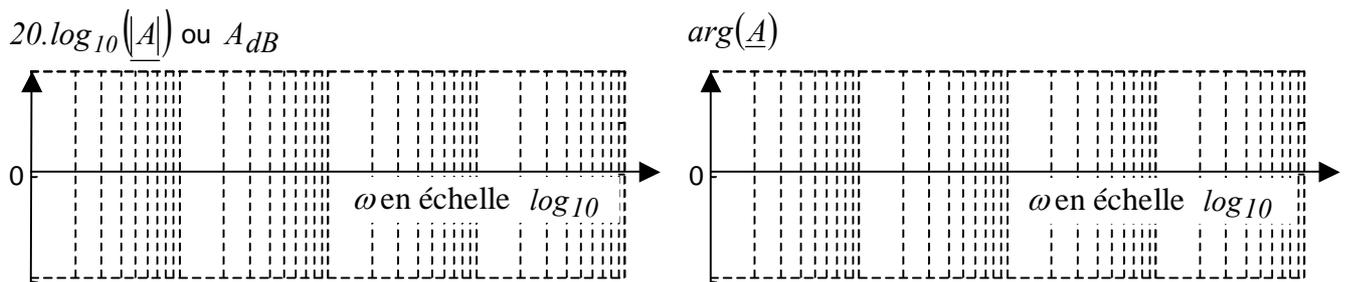
Le graphe d'une fonction $f(x)$ avec une échelle \log_{10} sur l'axe des abscisses est identique au graphe de $f(\log(x))$ avec l'échelle linéaire correspondante sur l'axe des abscisses.

2.3 Plan de Bode.

Le « plan de Bode » est une façon de décrire le **module** et l'**argument** d'un complexe $\underline{A}(\omega)$ en fonction de ω ⁽¹⁾

Le module du complexe est décrit par la variable $20.\log_{10}(|\underline{A}|)$ (appelée $|\underline{A}|$ « en **décibel** » ou A_{dB}) en fonction de ω en échelle \log_{10} .

L'argument est représenté lui aussi en fonction de ω en échelle \log_{10} .



La représentation d'un complexe $\underline{A}(\omega)$ avec ces conventions est appelée « **diagramme de Bode de $\underline{A}(\omega)$** ».

(¹) Dans la suite de ce chapitre, la variable ω désignera généralement la pulsation d'une fonction alternative sinusoïdale

2.4 Représentation de la fonction $\underline{A} = j\omega\tau$ ou $\underline{A} = j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$ dans le plan de Bode.

(avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$: réel constant positif) (2).

➤ Montrer que le graphe de $20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|)$ (ou A_{dB}) en fonction de ω en échelle \log_{10} est une droite.

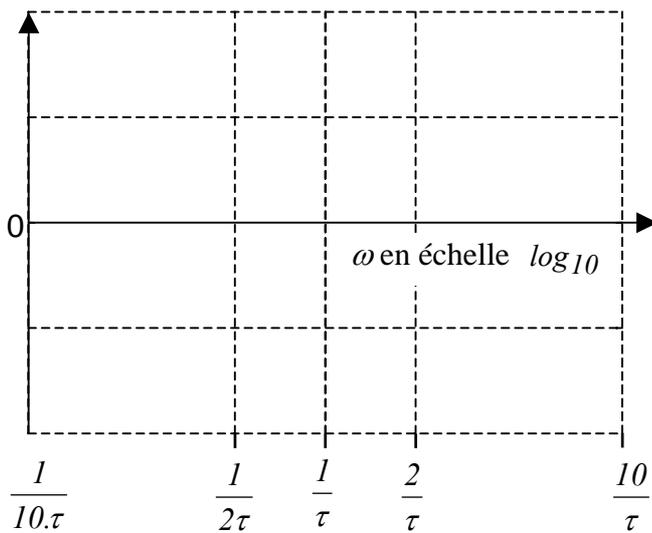
➤ Représenter ce graphe ainsi que celui de $\arg(\underline{A})$ sur les repères ci-dessous.

➤ Préciser les valeurs de $20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|)$ pour les valeurs de ω sélectionnée ci-dessous.

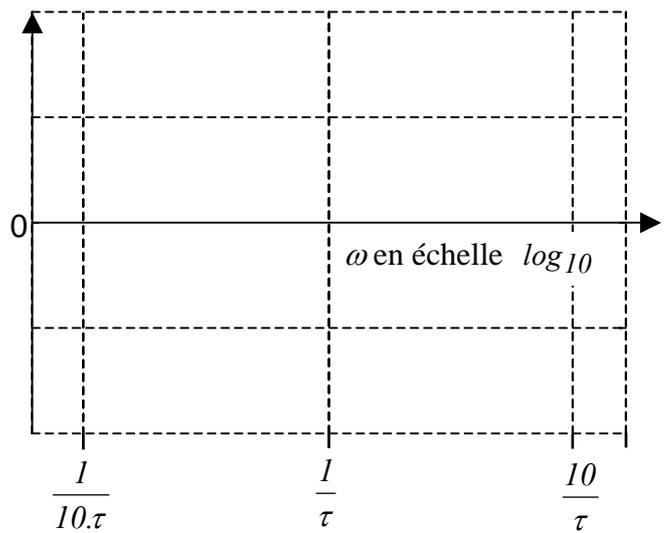
➤ Préciser la pente de la droite en $\frac{dB}{\text{décade}}$ (3) ou en $\frac{dB}{\text{octave}}$ (4).

(Réponse 3:)

$20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|)$ ou $|A|$ en dB



$\arg(\underline{A})$



$$\frac{1}{10\tau}$$

$$\frac{1}{2\tau}$$

$$\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{2}{\tau}$$

$$\frac{10}{\tau}$$

$$\frac{1}{10\tau}$$

$$\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{10}{\tau}$$

$$\frac{\omega_0}{10}$$

$$\frac{\omega_0}{2}$$

$$\omega_0$$

$$2\omega_0$$

$$10\omega_0$$

$$\frac{\omega_0}{10}$$

$$\omega_0$$

$$10\omega_0$$

(2) Certains auteurs utilisent la variable « τ » et d'autres la variable « ω_0 ».

(3) Une décade est l'intervalle entre une valeur ω et une valeur 10ω .

(4) Une octave est l'intervalle entre une valeur ω et une valeur 2ω .

2.5 Représentation de la fonction $\underline{A} = \frac{1}{j\omega\tau}$ ou $\underline{A} = \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}$ dans le plan de Bode.

(avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$: réel constant positif)

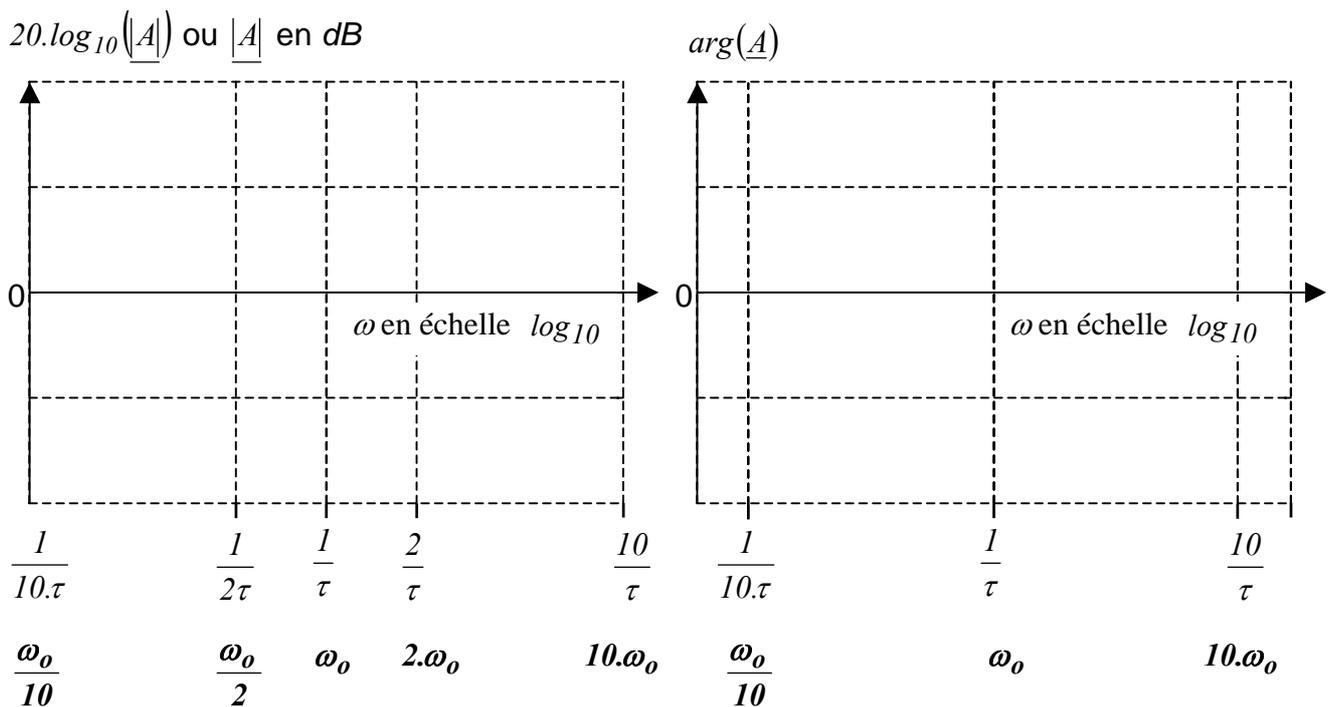
➤ Montrer que le graphe de $20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|)$ (ou A_{dB}) en fonction de ω en échelle \log_{10} est une droite.

➤ Représenter ce graphe ainsi que celui de $\arg(\underline{A})$ sur les repères ci-dessous.

➤ Préciser les valeurs de $20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|)$ pour les valeurs de ω sélectionnée ci-dessous.

➤ Préciser la pente de la droite en $\frac{dB}{\text{décade}}$ ou en $\frac{dB}{\text{octave}}$.

(Réponse 4:)



2.6 Représentation de $\underline{A} = 1 + j\omega\tau$ ou $\underline{A} = 1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$ dans le plan de Bode.

(avec $\omega\omega = \frac{1}{\tau}$: réel constant positif)

➤ Déterminer et représenter ci-dessous l'asymptote de A_{dB} en fonction de ω en échelle \log_{10} lorsque $\omega \rightarrow 0$. Préciser l'asymptote de $\arg(\underline{A})$ dans ce cas.

➤ Déterminer et représenter ci-dessous l'asymptote de A_{dB} en fonction de ω en échelle \log_{10} lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Préciser sa pente en $\frac{dB}{\text{décade}}$ et en $\frac{dB}{\text{octave}}$. Préciser l'asymptote de $\arg(\underline{A})$ dans ce cas.

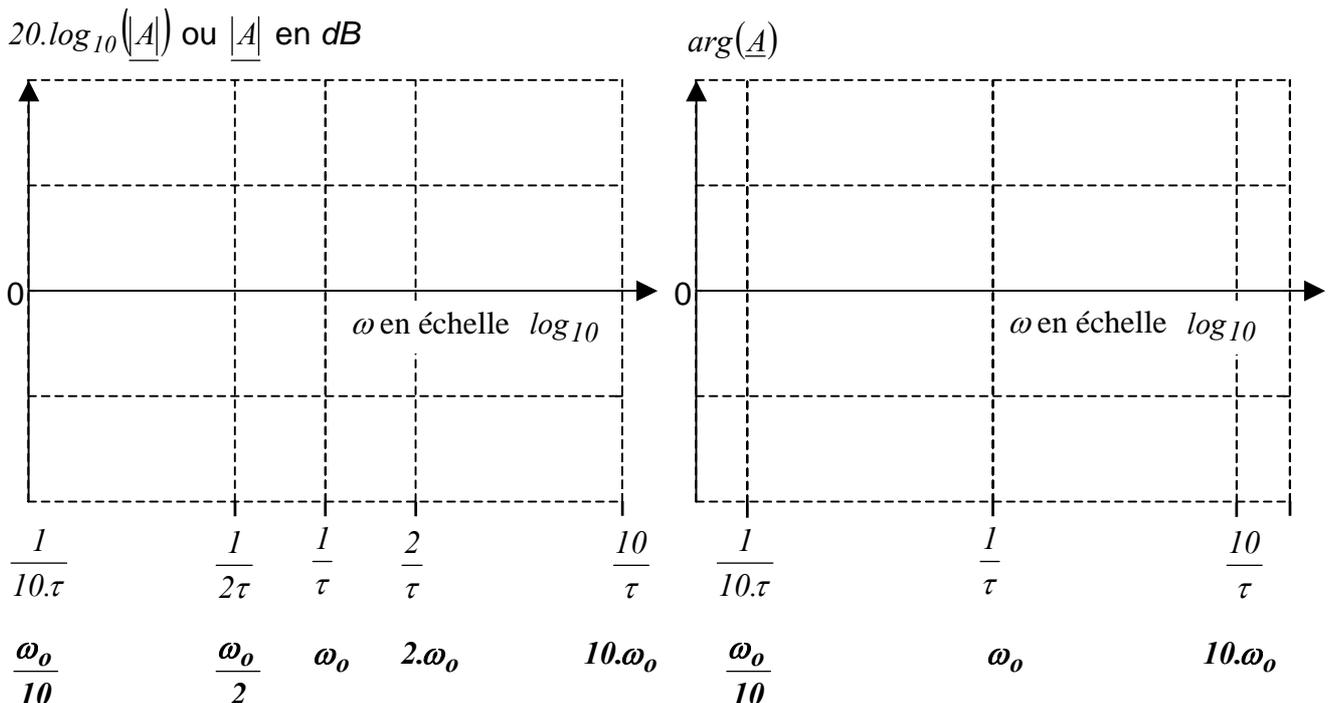
➤ Quel est le point d'intersection de ces deux asymptotes ?

➤ Préciser les valeurs de A_{dB} et de $\arg(\underline{A})$ pour les valeurs de ω sélectionnée ci-dessous.

➤ Représenter ci-dessous le graphe de A_{dB} avec son approximation par ses deux asymptotes. Cette approximation est appelée diagramme asymptotique de A_{dB} .

➤ Représenter ci-dessous le graphe $\arg(\underline{A})$. Approximer ce graphe avec trois segments de droite respectivement sur $]-\infty, \frac{1}{10\tau}[$, $[\frac{1}{10\tau}, \frac{10}{\tau}]$ et $]\frac{10}{\tau}, +\infty[$.

(Réponse 5:)



2.7 Représentation de $\underline{A} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ ou $\underline{A} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ dans le plan de Bode.

(avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$: réel constant positif)

➤ Déterminer et représenter ci-dessous l'asymptote de A_{dB} en fonction de ω en échelle \log_{10} lorsque $\omega \rightarrow 0$. Préciser l'asymptote de $\arg(\underline{A})$ dans ce cas.

➤ Déterminer et représenter ci-dessous l'asymptote de A_{dB} en fonction de ω en échelle \log_{10} lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Préciser sa pente en $\frac{dB}{\text{décade}}$ et en $\frac{dB}{\text{octave}}$. Préciser l'asymptote de $\arg(\underline{A})$ dans ce cas.

➤ Quel est le point d'intersection de ces deux asymptotes ?

➤ Préciser les valeurs de A_{dB} et de $\arg(\underline{A})$ pour les valeurs de ω sélectionnée ci-dessous.

➤ Représenter ci-dessous le graphe de A_{dB} avec son approximation par ses deux asymptotes.

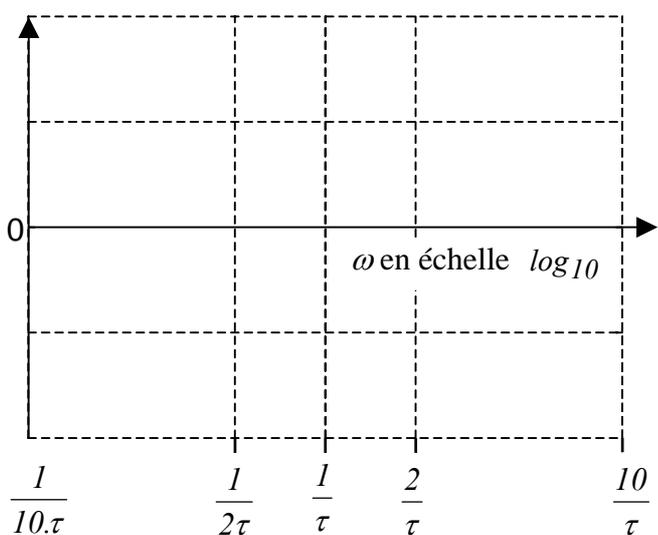
Cette approximation est appelée diagramme asymptotique de A_{dB} .

➤ Représenter ci-dessous le graphe $\arg(\underline{A})$. Approximer ce graphe avec trois segments de droite respectivement sur $]-\infty, \frac{1}{10\tau}[$, $[\frac{1}{10\tau}, \frac{10}{\tau}]$ et $]\frac{10}{\tau}, +\infty[$.

➤ La « **pulsation de coupure à -3db** » est la valeur ω_0 pour laquelle A_{dB} perd 3db par rapport à son maximum. Préciser la pulsation de coupure à -3dB dans le cas de cet exemple.

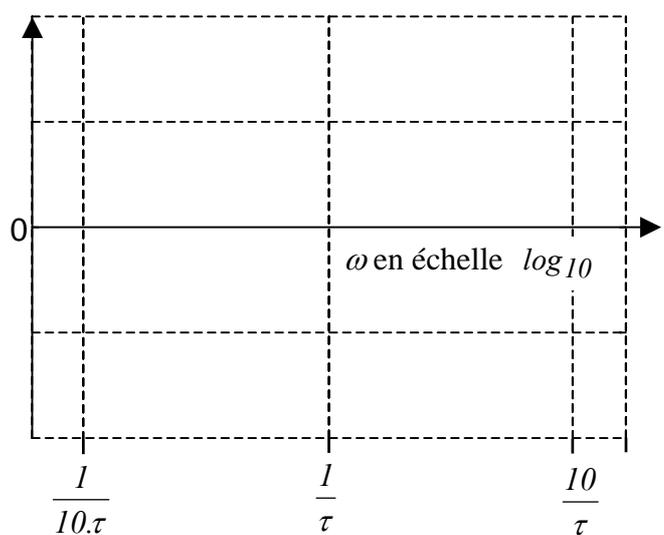
(Réponse 6:)

2.8 $20 \log_{10}(|\underline{A}|)$ ou $|\underline{A}|$ en dB



$\frac{\omega_0}{10}$ $\frac{\omega_0}{2}$ ω_0 $2\omega_0$ $10\omega_0$

$\arg(\underline{A})$



$\frac{\omega_0}{10}$ ω_0 $10\omega_0$

Conclusion

Dans le plan de Bode, l'utilisation des coordonnées logarithmiques offre deux avantages :

Représentation aisée de très grandes variations du paramètre ω .

Le produit de plusieurs complexes $\underline{A}_1(\omega) \cdot \underline{A}_2(\omega) \cdot \underline{A}_3(\omega)$ se traduit dans le plan de Bode par la somme des courbes représentant respectivement de $\underline{A}_1(\omega)$, $\underline{A}_2(\omega)$ et $\underline{A}_3(\omega)$.

En effet

$$\begin{aligned}
 20 \cdot \log_{10} \left(\left| \underline{A}_1(\omega) \cdot \underline{A}_2(\omega) \cdot \underline{A}_3(\omega) \right| \right) &= 20 \cdot \log_{10} \left(\left| \underline{A}_1(\omega) \right| \cdot \left| \underline{A}_2(\omega) \right| \cdot \left| \underline{A}_3(\omega) \right| \right) \\
 &= 20 \cdot \log_{10} \left(\left| \underline{A}_1(\omega) \right| \right) + 20 \cdot \log_{10} \left(\left| \underline{A}_2(\omega) \right| \right) + 20 \cdot \log_{10} \left(\left| \underline{A}_3(\omega) \right| \right) \\
 \Leftrightarrow \boxed{(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)_{dB} = A_{1dB} + A_{2dB} + A_{3dB}}
 \end{aligned}$$

et

$$\boxed{\arg \left(\underline{A}_1(\omega) \cdot \underline{A}_2(\omega) \cdot \underline{A}_3(\omega) \right) = \arg \left(\underline{A}_1(\omega) \right) + \arg \left(\underline{A}_2(\omega) \right) + \arg \left(\underline{A}_3(\omega) \right)}$$

En conclusion :

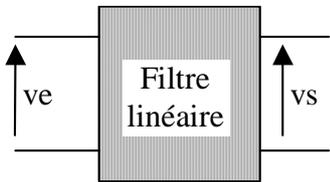
Les diagrammes de Bode présentent l'intérêt de « visualiser » une expression complexe $\underline{A}(\omega)$.
Les échelles choisies permettent de transformer des produits en sommes et des rapports en différences.

On obtient une bonne approche des diagrammes de Bode par des « diagrammes de Bode asymptotiques ».

3 EXERCICES

Chap 8. Exercice 1 : Filtrage N°1.

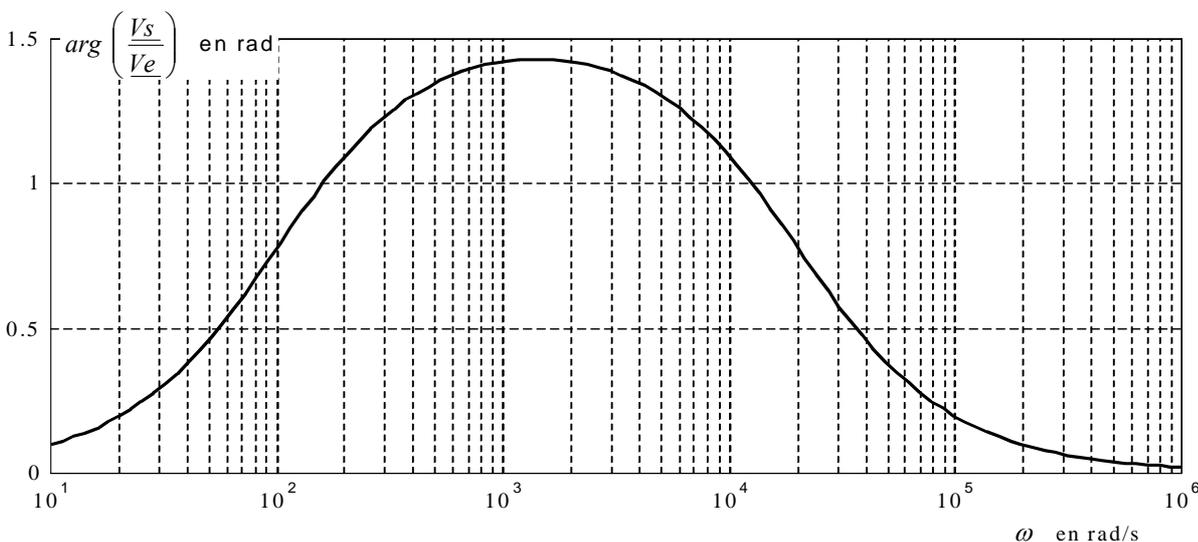
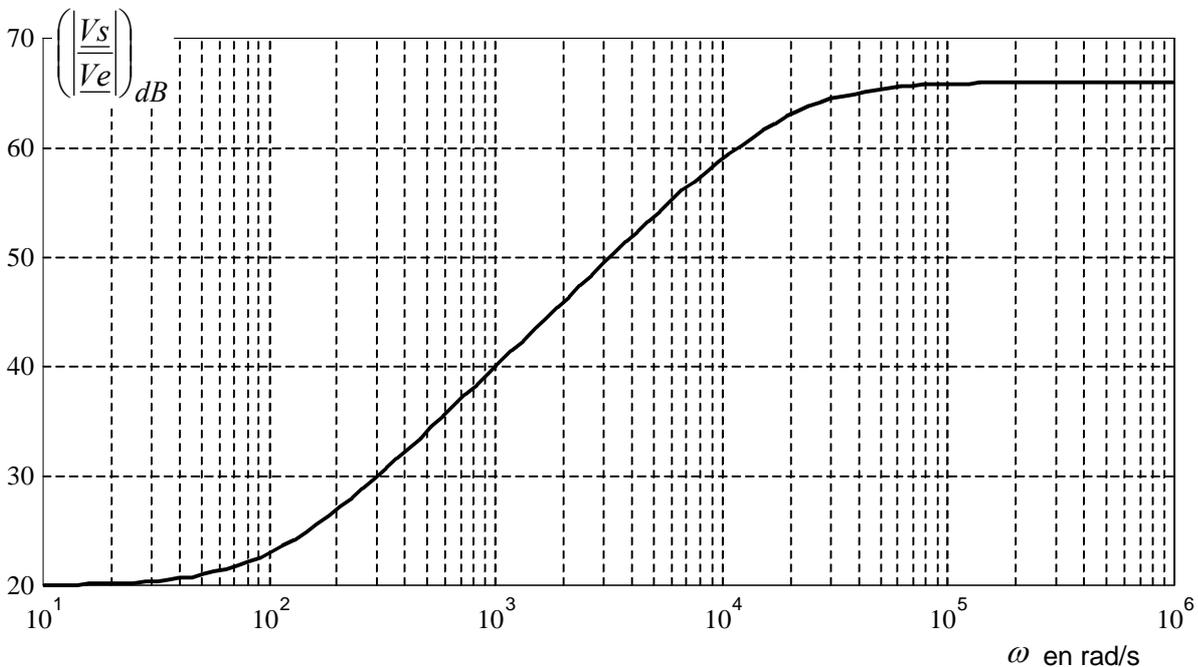
L'objectif de cet exercice est de lire un diagramme de Bode pour en extraire les informations recherchées.

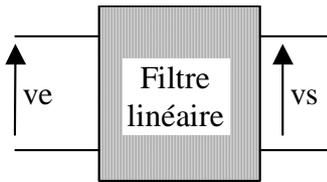


soit un filtre linéaire dont le comportement fréquentiel est décrit dans le plan de Bode par la fonction de transfert $\frac{v_s}{v_e}(\omega)$ suivante:

Si la tension en entrée du filtre est $v_e(t) = 10^{-3} \cdot \cos(10000.t)$, en déduire l'expression de $v_s(t)$.

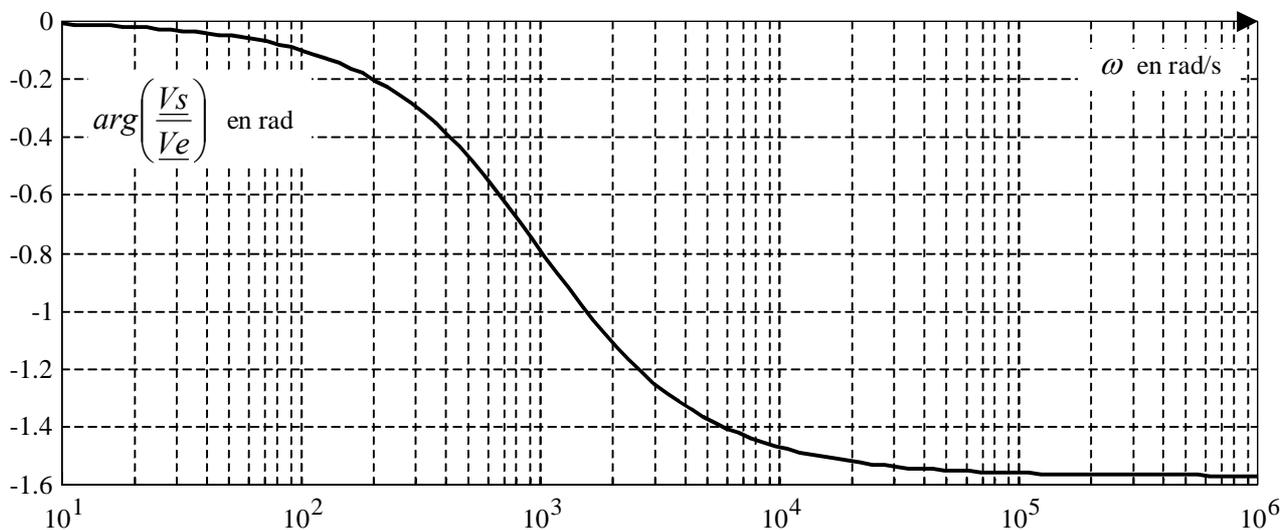
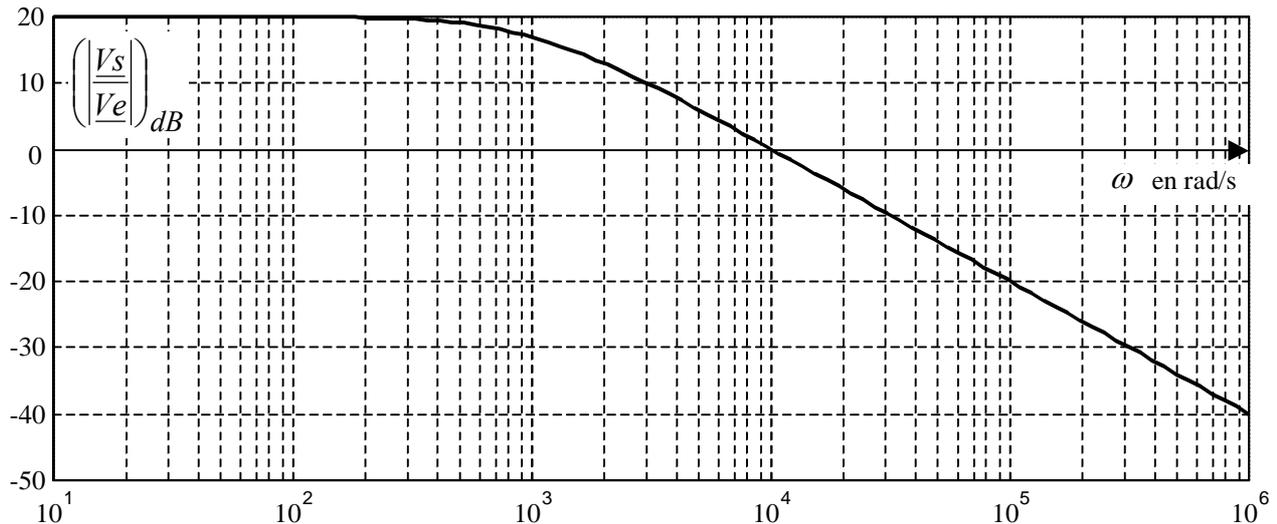
Si la tension en entrée du filtre est $v_e(t) = 10^{-3} \cdot \sin(200.t)$, en déduire l'expression de $v_s(t)$.



Chap 8. Exercice 2 : Filtrage N°2.

Soit un filtre, constitué d'un réseau électrique linéaire (5), dont le comportement fréquentiel est décrit dans le plan de Bode par la fonction de transfert $\frac{v_s}{v_e}(\omega)$ suivante:

Si la tension en entrée du filtre est $v_e(t) = 1.\cos(100.t) + 1.\cos(10^5.t)$, en déduire l'expression de $v_s(t)$.



(5) En présence d'un réseau linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition...

Chap 8. Exercice 3 : Construction d'un diagramme de Bode N°1.

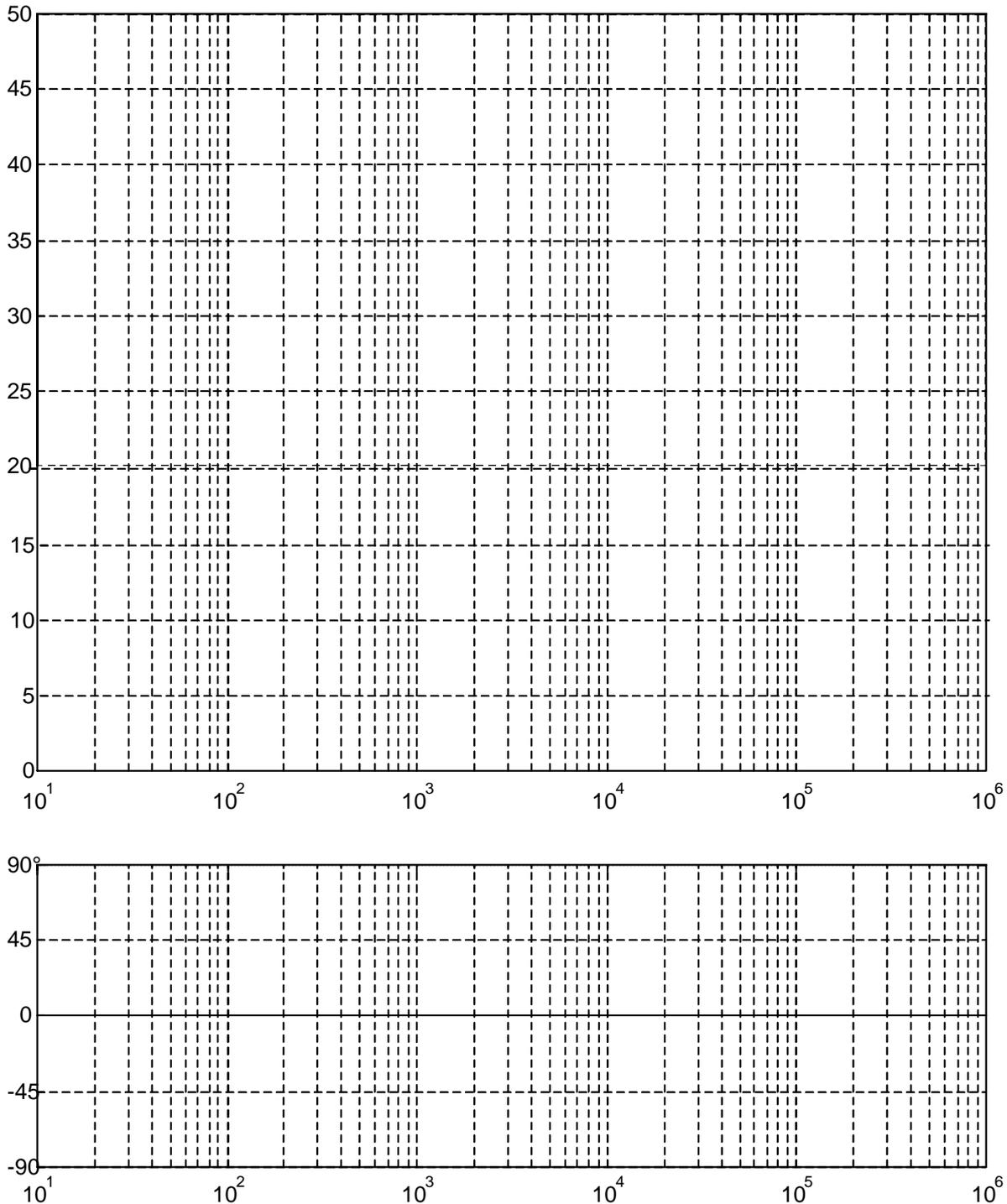
Cet exercice utilise les remarques du paragraphe 2.8 .

Représenter, dans le plan de Bode, les courbes asymptotiques de $\underline{A} = 10 \cdot \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau'}$ avec $\tau = 10^{-3}$

et $\tau' = 5 \cdot 10^{-5}$ en le construisant avec de la somme de trois diagrammes élémentaires.

Cette démarche permet de prévoir l'allure générale du diagramme de Bode de l'expression complexe « \underline{A} ».

Cela permettra ensuite de détecter les erreurs éventuelles lors d'un calcul informatique.

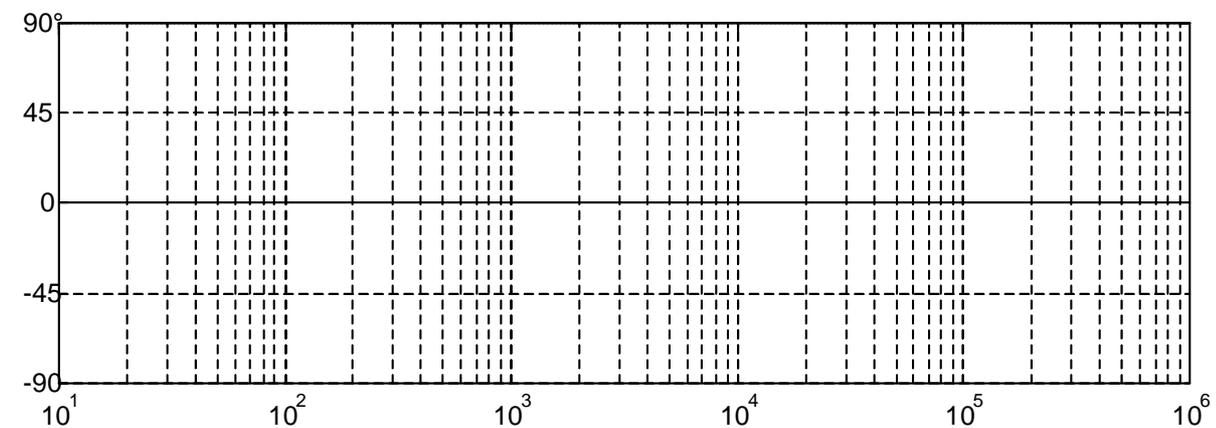
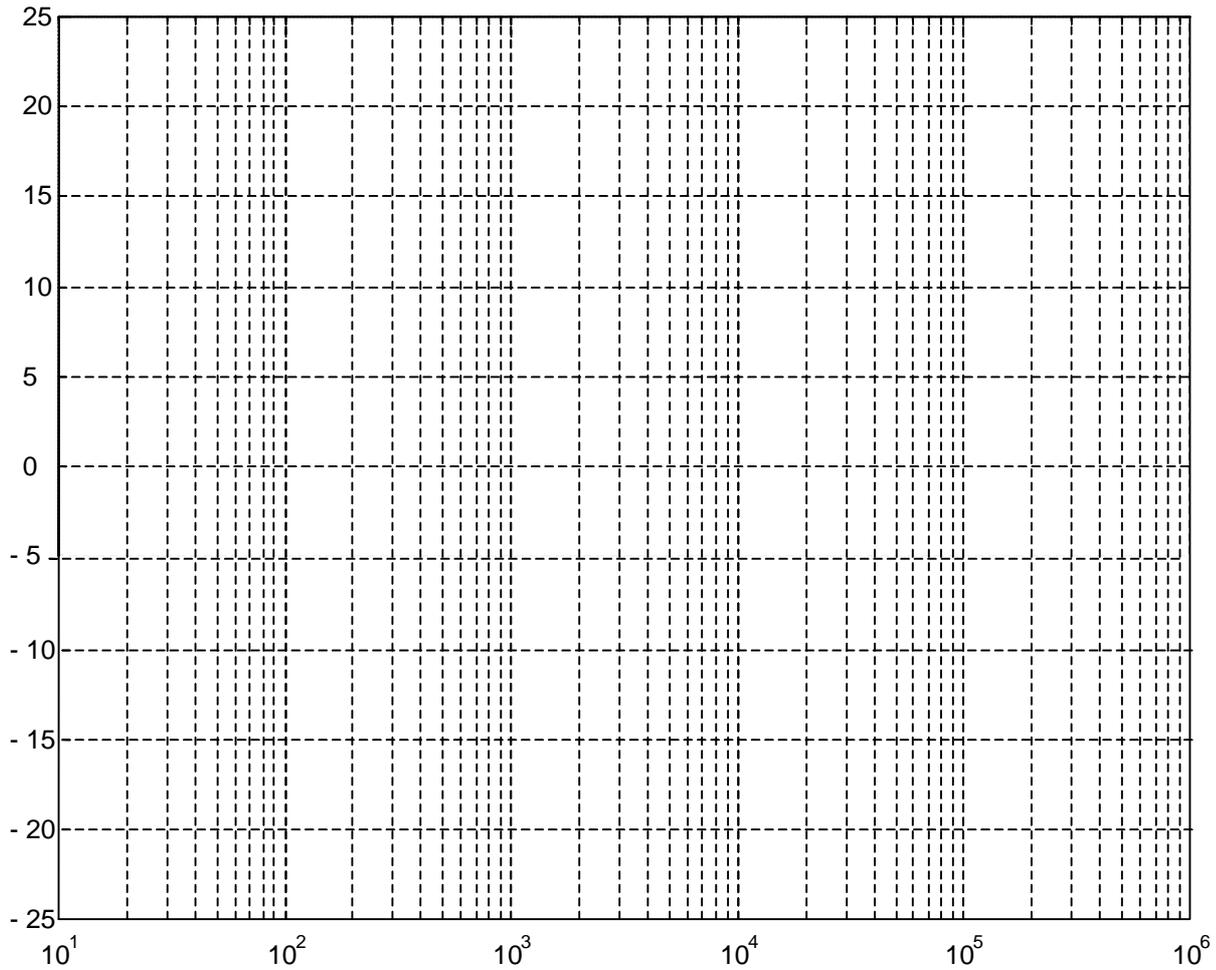


Chap 8. Exercice 4 : Construction d'un diagramme de Bode N°2.

Cet exercice utilise les remarques du paragraphe 2.8 .

Représenter, dans le plan de Bode, les courbes asymptotiques de :

$$\underline{A} = 10 \cdot \frac{j \frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \quad \text{avec } \omega_1 = 10^4 \text{ rad/s et } \omega_2 = 2 \cdot 10^2 \text{ rad/s}$$

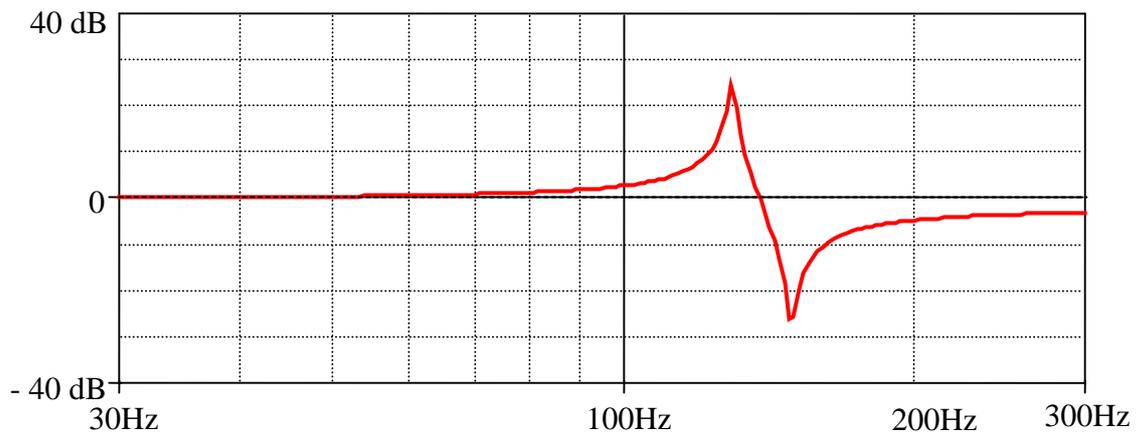
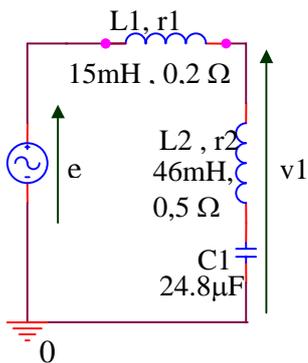


Chap 8. Exercice 5 : Utilisation d'un diagrammes de Bode.

objectif : exploiter les informations contenues dans un diagramme de Bode. (Il n'est pas demandé de déterminer ce diagramme (6)).

Attention : le logiciel de simulation utilisé établit les diagrammes en fonction de la fréquence et non pas de la pulsation.

a) A l'aide d'un logiciel de simulation, on a obtenu le diagramme de Bode de $\frac{V_1}{E}$ (modules en dB et arguments en degrés) (voir ci-dessous).
(Pour la simulation, on a tenu compte des résistances internes des bobines)



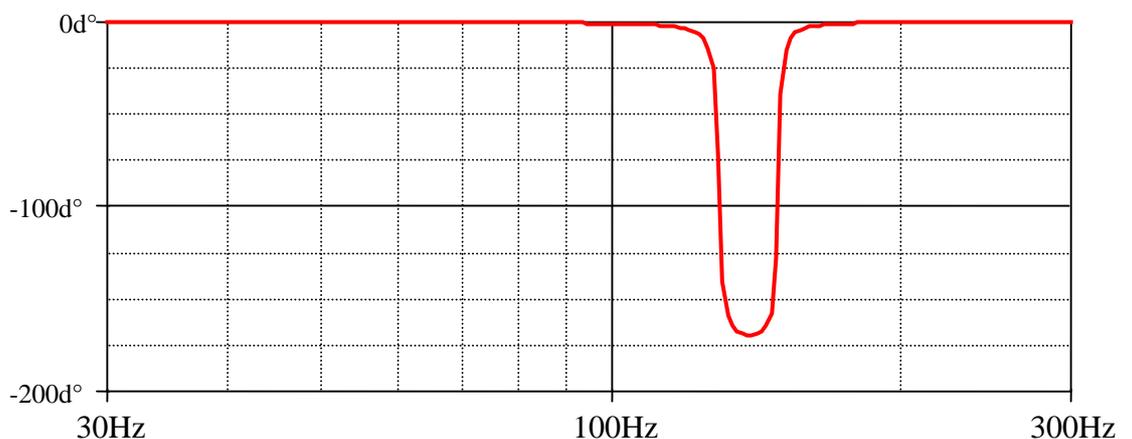
Sachant que $e(t) = 100.\cos(2.\pi.50.t)$,

Déterminer, à l'aide du diagramme de Bode ci-contre, une estimation de

$$20.\log_{10}\left(\frac{|V_1|}{|E|}\right)$$

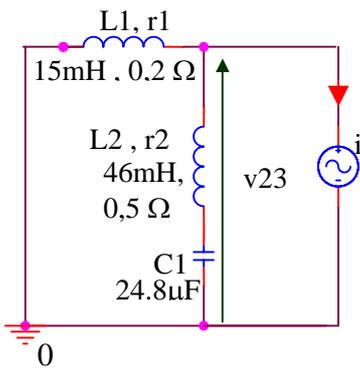
ainsi que de l'angle orienté (\vec{E}, \vec{V}_1) (de \vec{E} vers \vec{V}_1). En déduire

une estimation de $v_1(t)$



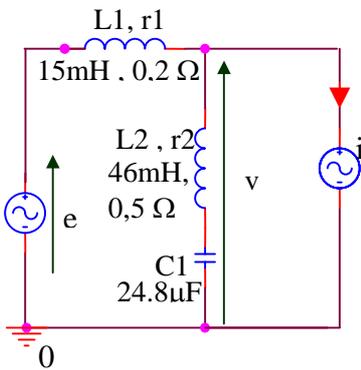
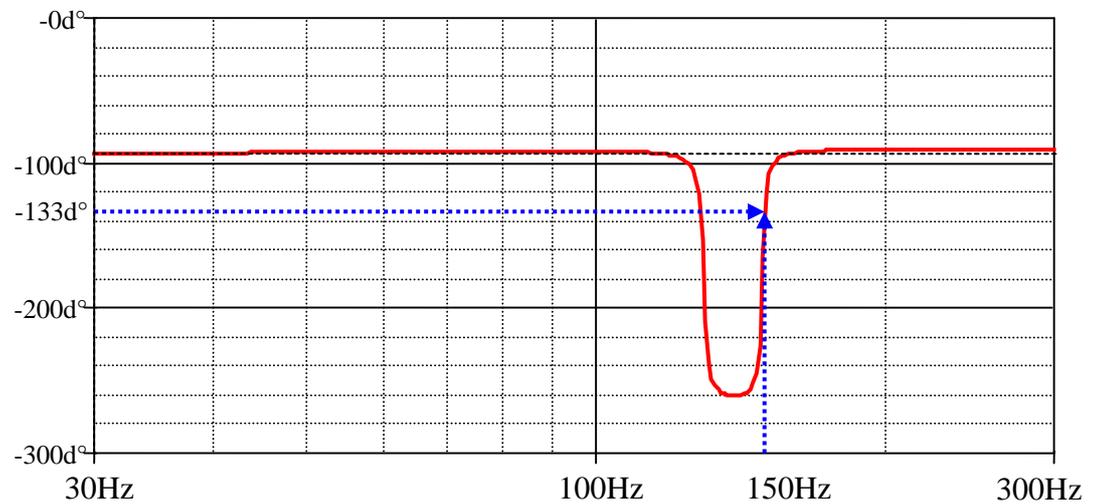
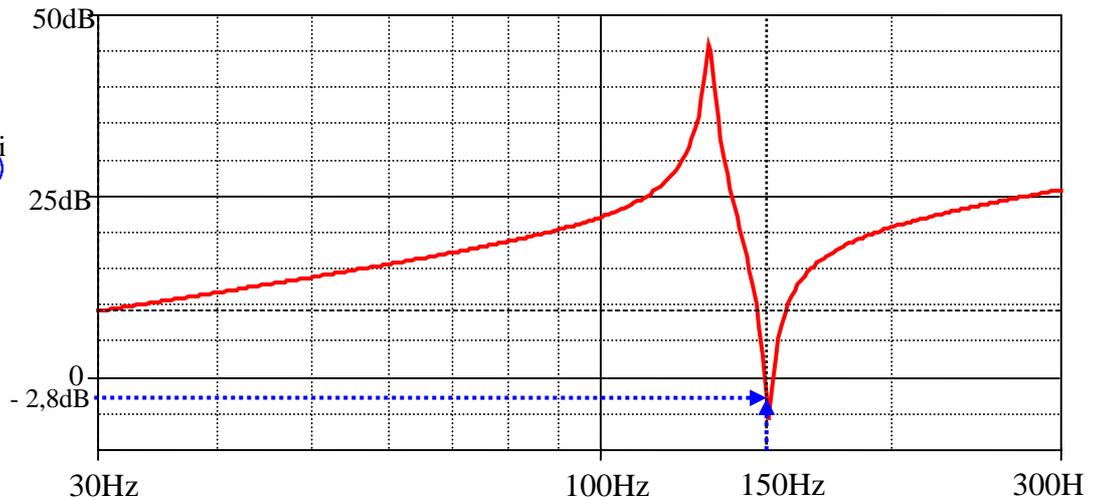
(6) Les diagrammes de Bode utilisés dans cet exercice sont des diagrammes du second ordre. Leur tracé n'a pas été étudié dans ce cours.

b) A l'aide d'un logiciel de simulation, on a obtenu le diagramme de Bode de $\frac{V_{23}}{I}$ (voir ci-



dessous).

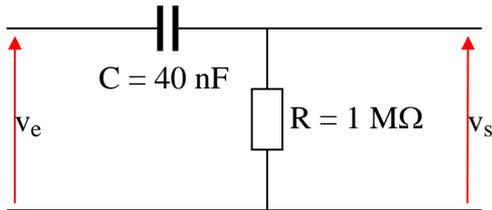
Sachant que
 $i(t) = 10 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t)$
 $+ 4 \cos(300 \cdot \pi \cdot t)$
 déterminer, à l'aide
 du diagramme de
 Bode ci-contre, une
 estimation de $v_{23}(t)$



c) Sachant que $e(t) = 100 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t)$, que
 $i(t) = 10 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t) + 4 \cos(300 \cdot \pi \cdot t)$,
 Déterminer, en utilisant les résultats de a) et b) une estimation de
 $v(t)$

Chap 8. Exercice 6 : Fonction AC/DC d'un oscilloscope

L'entrée de mesure d'un oscilloscope peut être modélisée par un dipôle constitué d'une résistance de $1\text{ M}\Omega$ en parallèle avec un condensateur de quelques pico Farad (7). Dans la configuration ci-dessous, on peut négliger l'influence de ce condensateur et considérer que cette entrée se modélise par une résistance de $1\text{ M}\Omega$.



Lorsqu'on configure cette entrée en position « AC », un condensateur de 40 nF est ajouté en série avec celle-ci.

Avec cet oscilloscope, on veut mesurer une tension $v_e(t) = V_{\max} \cdot \cos(\omega.t)$, mais celui-ci ne « voit » alors que la tension $v_s(t)$. (voir ci-dessus)

Le réseau linéaire ci-dessus étant en régime alternatif sinusoïdal, on peut l'étudier en utilisant le calcul en complexe.

a) Sachant que $\Rightarrow \frac{1}{RC} = 25\text{ rad/s}$, exprimer $\frac{V_s}{V_e}$ sous la forme $\frac{j.a.\omega}{1+j.b.\omega}$. (préciser les valeurs de « a » et de « b »)

b) Exprimer une approximation de $\frac{V_s}{V_e}$ si $\omega \ll 25\text{ rad/s}$

c) Exprimer une approximation de $\frac{V_s}{V_e}$ si $\omega \gg 25\text{ rad/s}$

d) En déduire le diagramme asymptotique de Bode de $\frac{V_s}{V_e}$ (module et argument)

e) Dans quel domaine de pulsations peut-on considérer que $\underline{V_s} = \underline{V_e}$?

f) Application :

$v_e(t) = 10 \cdot \cos(1000.t) + 5$. Exprimer dans ce cas $v_s(t)$

g) Conclure sur l'intérêt de la fonction « AC » d'un oscilloscope (8)

(7) pico = 10^{-12}

(8) L'autre position est la position « DC », l'entrée est alors directe, sans l'ajout d'un condensateur.

Chap 8. Exercice 7 : Filtrage d'un capteur de vitesse

Objectif : Introduire une notion importante en électronique : le filtrage.

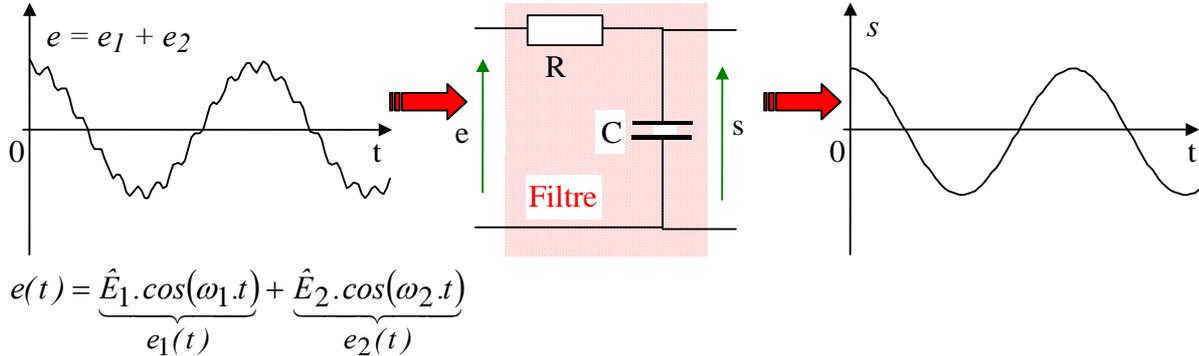
Dans une chaîne de régulation de vitesse, un capteur de vitesse délivre une tension $e_1(t)$ proportionnelle à la vitesse qu'il mesure. Mais, en raison de la technologie employée, cette tension est parasitée par une tension alternative sinusoïdale $e_2(t)$ de fréquence élevée.

Le capteur se comporte donc comme une source de tension de valeur : $e(t) = e_1(t) + e_2(t)$

La vitesse à mesurer varie lentement. Elle sera modélisée par exemple par une sinusoïde dont la pulsation varie de 0 à 5 rad/s.

L'objectif est de choisir un filtre RC de façon à extraire l'information utile $e_1(t)$.

Les données :



(avec $0 < \omega_1 < 5 \text{ rad/s}$ et $1000 \text{ rad/s} < \omega_2 < 2000 \text{ rad/s}$)

a) Exprimer la fonction de transfert $\frac{S}{E}$ du filtre RC ci-dessus sous la forme $\frac{S}{E} = \frac{1}{a + j \frac{\omega}{\omega_0}}$

avec $a = \text{constante}$ et $\omega_0 = \text{constante}$

b) Représenter dans le plan de Bode les diagrammes asymptotiques de $20 \log_{10} \left(\left| \frac{S}{E} \right| \right)$ et de $\arg \left(\frac{S}{E} \right)$ (3 segments) (Graduer l'axe des pulsations en fonction de $\frac{1}{R.C}$).

c) On a choisit $R.C = 20 \text{ ms}$.

Pour le cas particulier : $e(t) = 20 \cdot \cos(5 \cdot t) + 2 \cdot \cos(1000 \cdot t)$, estimer $s(t)$ à partir du diagramme de Bode précédent.

d) Sachant que dans tous les cas, $\hat{E}_1 \geq 10 \cdot \hat{E}_2$, $0 < \omega_1 < 5 \text{ rad/s}$ et $1000 \text{ rad/s} < \omega_2 < 2000 \text{ rad/s}$, le montage proposé remplit-il l'objectif fixé?

4 CE QUE J'AI RETENU DU CHAPITRE « REPRESENTATION GRAPHIQUE DU COMPORTEMENT FREQUENTIEL ; DIAGRAMME DE BODE ».

- Les valeurs remarquables des \log_{10} (voir § 2.1) doivent être connues par cœur. Suis-je capable de compléter le tableau suivant sans hésiter ?

$\log_{10}(a \times b) =$	$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) =$
$\log_{10}(a^b) =$	$\log_{10}(1) =$
$\log_{10}\left(\frac{1}{a}\right) =$	$\log_{10}(10) =$
$\log_{10}(100) =$	$\log_{10}(0,1) =$
$\log_{10}(10^n) =$	$\log_{10}(2) =$
$\log_{10}(a \cdot 10^n) =$	

- Quels sont les paramètres utilisés sur les axes du plan de Bode ?
- Qu'est-ce qu'une décade ?
- Qu'est-ce qu'une octave ?
- Que me dit l'expression 20dB/décade ou l'expression 6dB/octave ?
- Comment détermine-t-on le diagramme asymptotique d'une expression complexe constituée de produit ou de rapports de fonctions élémentaires ?

- Représenter les diagrammes asymptotiques de type $j \cdot \omega \cdot \tau = \frac{j \cdot \omega}{\omega_0}$; $\frac{1}{j \cdot \omega \cdot \tau} = \frac{1}{\frac{j \cdot \omega}{\omega_0}}$;

$$1 + j\omega\tau = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ (module puis argument)? (retenir en particulier)}$$

l'approximation de l'argument au voisinage de la pulsation de coupure)

Ces diagrammes de Bode sont à connaître par cœur

Des tests interactifs sont disponibles sur le site . Dans l'onglet « ressources », indiquer « 1385 » ou « 1384 »

ou sur le site  GEII/Electricité/ Systèmes du 1er et du 2ème ordre - Filtres

5 REPONSES AUX QUESTIONS DU COURS

Réponse 1:

$$\log_{10}(a \times b) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$$

$$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$$

$$\log_{10}(a^b) = b \cdot \log_{10}(a)$$

$$\log_{10}(1) = 0$$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_{10}(a)$$

$$\log_{10}(10) = 1$$

$$\log_{10}(100) = 2$$

$$\log_{10}(0,1) = -1$$

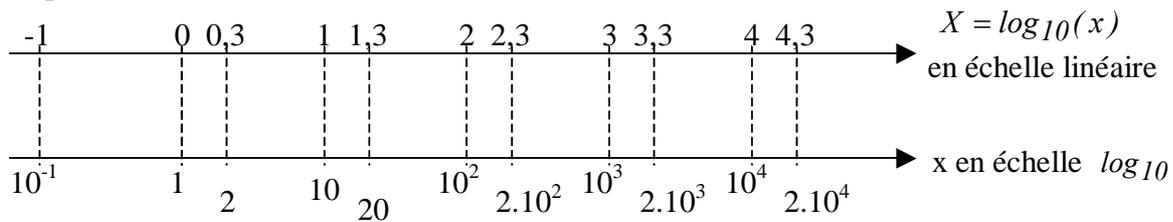
$$\log_{10}(10^n) = n$$

$$\log_{10}(2) = 0,3$$

$$\log_{10}(a \cdot 10^n) = \log_{10}(a) + n$$

[Retour](#)

Réponse 2:



[Retour](#)

Réponse 3:

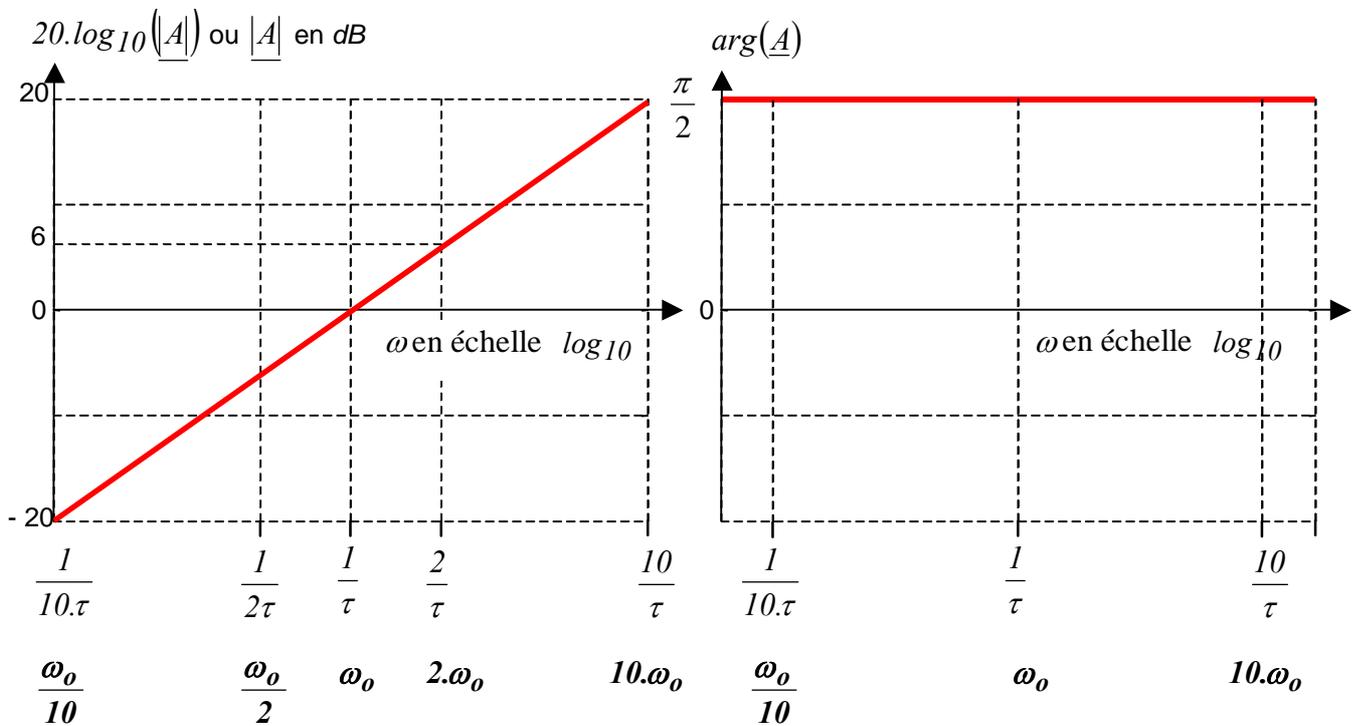
$$\underbrace{20.\log_{10}(|\underline{A}|)}_y = 20.\log_{10}(\omega.\tau) = \underbrace{20}_{a}.\log_{10}(\omega) + \underbrace{20.\log_{10}(\tau)}_b$$

C'est l'équation d'une droite : $y = a.X + b$ de coefficient directeur : 20.

Donc lorsque « X » progresse de 1 unité, $20.\log_{10}(|\underline{A}|)$ progresse de 20 dB. Donc lorsque ω est multiplié par 10, $20.\log_{10}(|\underline{A}|)$ progresse de 20 dB. Lorsque ω est multiplié par 2, $20.\log_{10}(|\underline{A}|)$ progresse de $20.\log_{10}(2) = 20.0,3 = 6 \text{ dB}$.

On dit que la pente de la droite est de 20 dB / *décade* ou de 6 dB / *octave*.

$$\arg(\underline{A}) = \arg(j\omega.\tau) = \frac{\pi}{2}$$



[Retour](#)

Réponse 4:

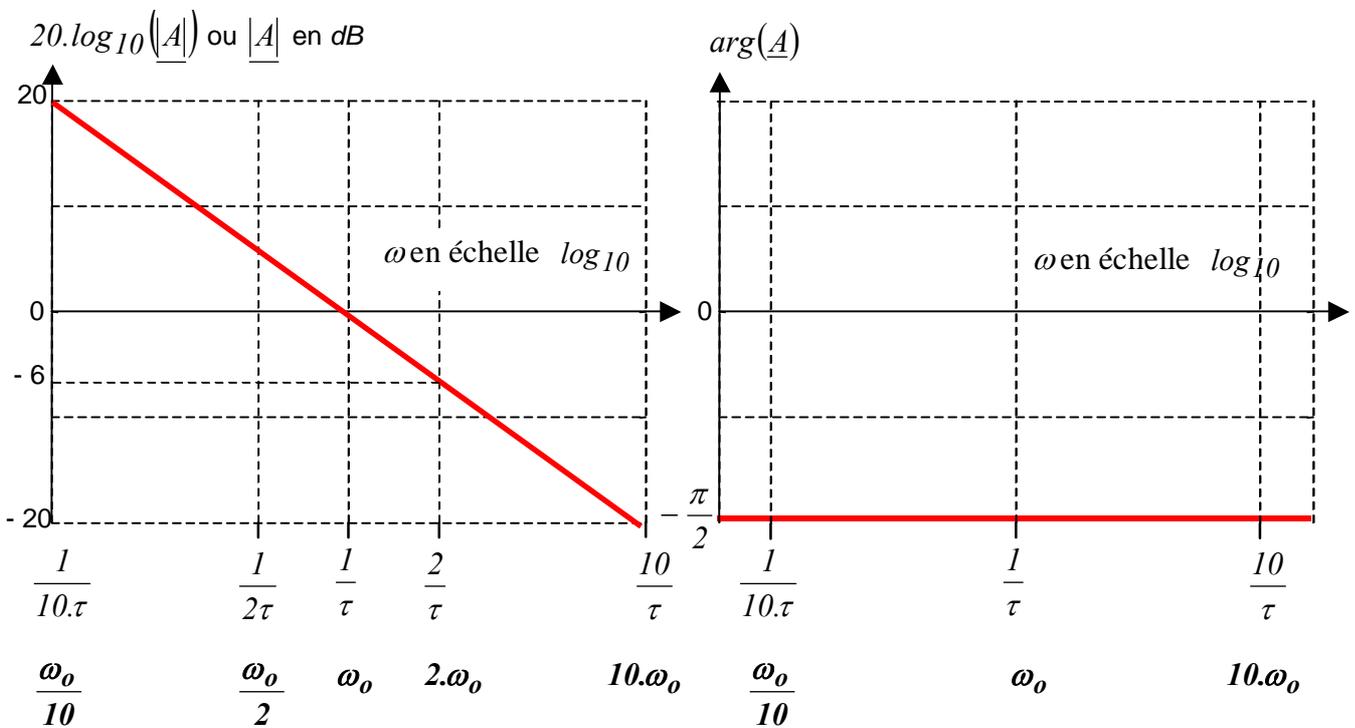
$$\underbrace{20.\log_{10}(|\underline{A}|)}_y = -20.\log_{10}(\omega.\tau) = \underbrace{-20.\log_{10}(\omega)}_a \underbrace{\log_{10}(\omega)}_X - \underbrace{20.\log_{10}(\tau)}_b$$

C'est l'équation d'une droite : $y = a.X + b$ de coefficient directeur : - 20.

Donc lorsque « X » progresse de 1 unité, $20.\log_{10}(|\underline{A}|)$ diminue de 20 dB. Donc lorsque ω est multiplié par 10, $20.\log_{10}(|\underline{A}|)$ diminue de 20 dB. Lorsque ω est multiplié par 2, $20.\log_{10}(|\underline{A}|)$ diminue de $20.\log_{10}(2) = 20.0,3 = 6 \text{ dB}$.

On dit que la pente de la droite est de - 20 dB / *décade* ou de - 6 dB / *octave*.

$$\arg(\underline{A}) = \arg\left(\frac{1}{j\omega.\tau}\right) = -\frac{\pi}{2}$$



[Retour](#)

Réponse 5:

➤ Si $\omega \rightarrow 0$, la partie imaginaire de $\underline{A} = 1 + j\omega\tau$ est négligeable devant sa partie réelle.
 $\Rightarrow A_{dB} \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|) = 20 \cdot \log_{10}(|1|) = 0$. $\arg(\underline{A}) = \arg(1) = 0$

➤ Si $\omega \rightarrow \infty$, la partie réelle de $\underline{A} = 1 + j\omega\tau$ est négligeable devant sa partie imaginaire.
 $\Rightarrow A_{dB} \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|) = 20 \cdot \log_{10}(|j\omega\tau|) = 20 \cdot \log_{10}(\omega\tau) = \underbrace{20 \cdot \log_{10}(\omega)}_a + \underbrace{20 \cdot \log_{10}(\tau)}_b$.

C'est une droite de pente : $20 \text{ dB} / \text{décade}$ ou de $6 \text{ dB} / \text{octave}$.

Cette droite coupe l'axe des abscisses pour $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_o$.

$$\arg(\underline{A}) = \arg(j\omega\tau) = \frac{\pi}{2}$$

➤ $\omega = \frac{1}{10\tau} = \frac{\omega_o}{10} \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = 0,043 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = 5,7^\circ \end{cases}$; $\omega = \frac{1}{2\tau} = \frac{\omega_o}{2} \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = 0,97 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = 26,57^\circ \end{cases}$;

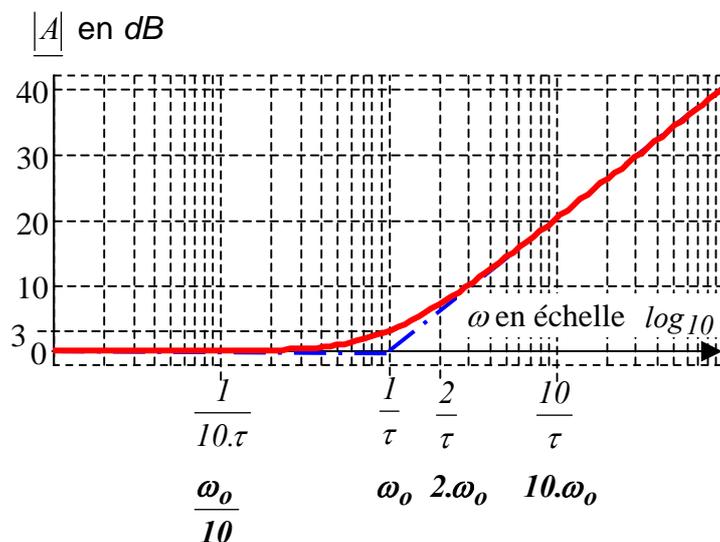
$$\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = 3 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = 45^\circ \end{cases}$$

$\omega = \frac{2}{\tau} = 2 \cdot \omega_o \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = 7 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = 63^\circ \end{cases}$; $\omega = \frac{10}{\tau} = 10 \cdot \omega_o \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = 20,04 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = 84,3^\circ \end{cases}$

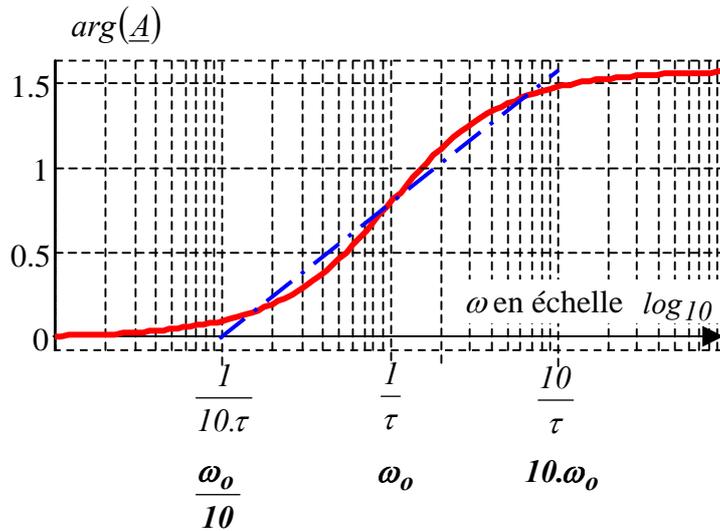
(Ces valeurs ne sont pas à retenir).

➤ La valeur $\omega_o = \frac{1}{\tau}$ est appelée « **pulsation de coupure** ».

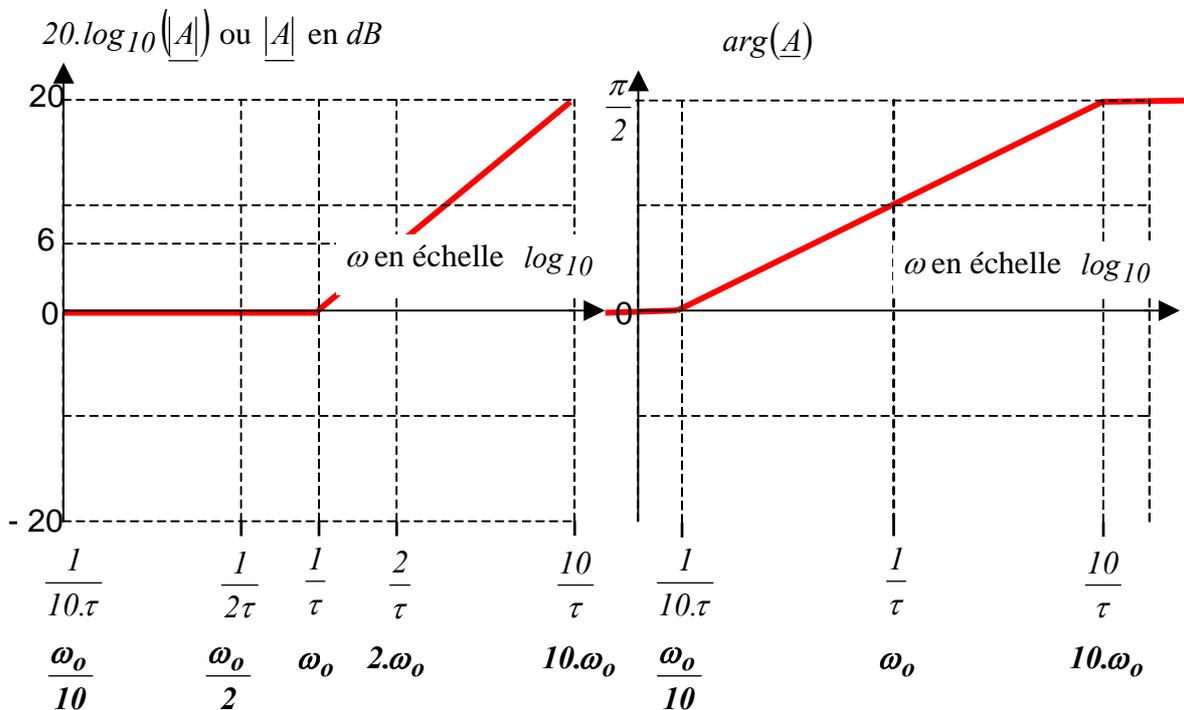
➤ Voici le diagramme exact (obtenu par calcul informatique) comparé au diagramme asymptotique de A_{dB} ;



➤ Voici le diagramme exact (obtenu par calcul informatique) de $\arg(\underline{A})$. Si $\frac{1}{10\tau} < \omega < \frac{10}{\tau}$: $0 < \arg(\underline{A}) < \frac{\pi}{2}$. On peut approximer $\arg(\underline{A})$ par un segment de droite comme ci-dessous



La représentation *asymptotique* du diagramme de Bode de $\underline{A} = 1 + j\omega\tau = \omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} + j \right)$ ci-dessous est à connaître par cœur.



[Retour](#)

Réponse 6:

➤ Si $\omega \rightarrow 0$, la partie imaginaire de $\underline{A} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ est négligeable devant sa partie réelle.

$$\Rightarrow A_{dB} \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|) = 20 \cdot \log_{10}\left(\left|\frac{1}{1}\right|\right) = 0 ; \arg(\underline{A}) = \arg\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

➤ Si $\omega \rightarrow \infty$, la partie réelle de $1 + j\omega\tau$ est négligeable devant sa partie imaginaire.

$$\Rightarrow A_{dB} \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|\underline{A}|) = 20 \cdot \log_{10}\left(\left|\frac{1}{j\omega\tau}\right|\right) = -20 \cdot \log_{10}(\omega\tau) = \underbrace{-20 \cdot \log_{10}(\omega)}_a - \underbrace{20 \cdot \log_{10}(\tau)}_b$$

C'est une droite de pente -20 dB / décade ou de -6 dB / octave . Cette droite coupe l'axe des abscisses à la pulsation de coupure $\omega = \frac{1}{\tau}$; $\arg(\underline{A}) = \arg\left(\frac{1}{j\omega\tau}\right) = -\frac{\pi}{2}$

➤ Par calcul, on peut obtenir quelques points remarquables du diagramme de Bode exact :

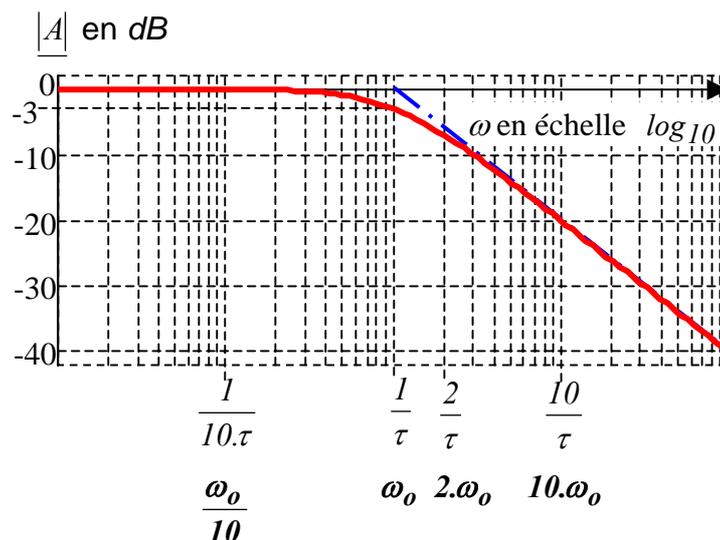
$$\omega = \frac{\omega_o}{10} = \frac{1}{10\tau} \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = -0,043 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = -5,7^\circ \end{cases} ; \quad \omega = \frac{\omega_o}{2} = \frac{1}{2\tau} \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = -0,97 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = -26,57^\circ \end{cases}$$

$$\omega = \omega_o = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = -3 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = -45^\circ \end{cases}$$

$$\omega = 2\omega_o = \frac{2}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = -7 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = -63^\circ \end{cases} ; \quad \omega = 10\omega_o = \frac{10}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} |A|_{dB} = -20,04 \text{ dB} \\ \arg(\underline{A}) = -84,3^\circ \end{cases}$$

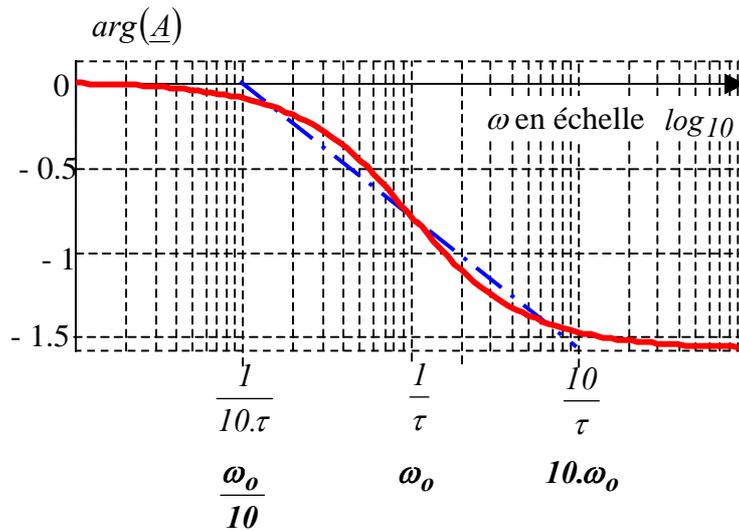
(Ces valeurs ne sont pas à retenir).

➤ Voici le diagramme exact (obtenu par calcul informatique) comparé au diagramme asymptotique de A_{dB} ;



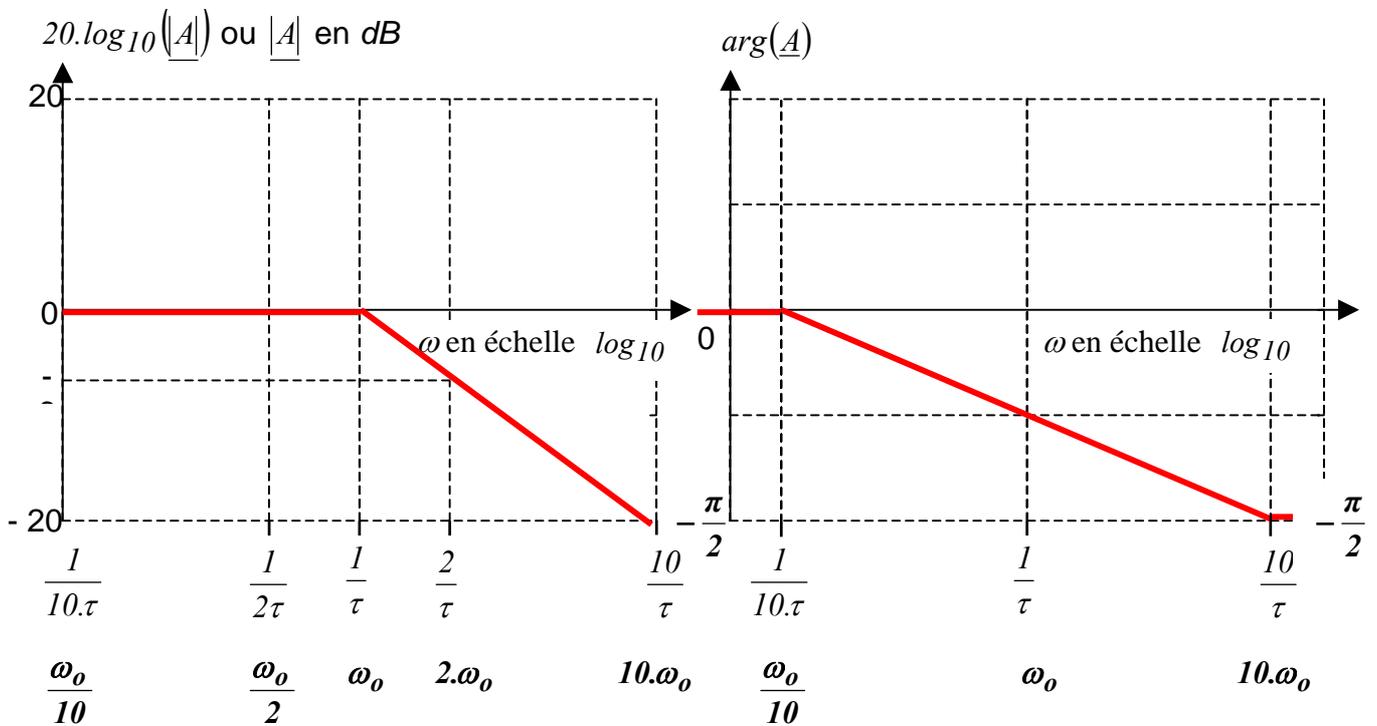
➤ La « pulsation de coupure à -3dB » est obtenue dans le cas pour $\omega_o = \frac{1}{\tau}$

➤ Voici le diagramme exact (obtenu par calcul informatique) de $\arg(\underline{A})$. Si $\frac{1}{10\tau} < \omega < \frac{10}{\tau}$:
 $-\frac{\pi}{2} < \arg(\underline{A}) < 0$. On peut approximer $\arg(\underline{A})$ par un segment de droite comme ci-dessous



La représentation *asymptotique* du diagramme de Bode de $\underline{A} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ ci-dessous est

à connaître par cœur.



[Retour](#)