

ELECTRICITE

Analyse des signaux et des circuits électriques

Michel Piou

Chapitre 4

La somme des signaux alternatifs sinusoïdaux de même fréquence

Edition 19/09/2010

numéro d'enregistrement de <Document Libre> : DL-001051-04-04.01.00



« copies autorisées pour un usage non commercial selon la Charte <Document Libre >
<http://www.documentlibre.org/CharteDL.html>

Table des matières

1 POURQUOI ET COMMENT ?	2
2 SOMME DE FONCTIONS ALTERNATIVES SINUSOÏDALES DE MEME FREQUENCE.	3
2.1 Somme en utilisant les expressions analytiques.....	3
2.2 Somme point par point en utilisant les représentations graphiques ou par tableau de points...4	
2.3 Somme en utilisant les vecteurs de Fresnel.....	4
2.4 Somme en utilisant les complexes.	6
3 PROBLEMES ET EXERCICES.....	9
Chap 4. Exercice 1 : Somme par les diagrammes de Fresnel.	9
Chap 4. Exercice 2 : Différence par les diagrammes de Fresnel.....	9
Chap 4. Exercice 3 : Loi des branches	10
Chap 4. Exercice 4 : Loi des nœuds	10
Chap 4. Exercice 5 : Loi des mailles.....	10
Chap 4. Exercice 6 : Tensions alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées	11
4 CE QUE J'AI RETENU DU CHAPITRE « LA SOMME DES SIGNAUX ALTERNATIFS SINUSOÏDAUX DE MEME FREQUENCE».....	12
5 REPONSES AUX QUESTIONS DU COURS.	13

Temps de travail estimé pour un apprentissage de ce chapitre en autonomie : 5 heures

Copyright : droits et obligations des utilisateurs

Ce document est extrait de la ressource *Baselecpro* qui est disponible en version numérique sur le site Internet *IUT en ligne*

Associé à *Baselecpro*, j'ai publié un **livre** aux éditions *Ellipses* dans la collection *Technosup* sous le titre « *ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE – Les lois de l'électricité* »

Je ne renonce pas à ma qualité d'auteur et aux droits moraux qui s'y rapportent du fait de la publication de mon document.

Les utilisateurs sont autorisés à faire un usage non commercial, personnel ou collectif, de ce document et de la ressource *Baselecpro*, notamment dans les activités d'enseignement, de formation ou de loisirs. Tout ou partie de cette ressource ne doit pas faire l'objet d'une vente - en tout état de cause, une copie ne peut pas être facturée à un montant supérieur à celui de son support.

Pour tout extrait de ce document, l'utilisateur doit maintenir de façon lisible le nom de l'auteur *Michel Piou*, la référence à *Baselecpro* et au site Internet *IUT en ligne*.

Michel PIOU - Agrégé de génie électrique – IUT de Nantes - FRANCE

LA SOMME DES SIGNAUX ALTERNATIFS SINUSOÏDAUX DE MEME FREQUENCE

1 POURQUOI ET COMMENT ?

Les fonctions alternatives sinusoïdales sont très présentes dans le monde des électriciens et des électroniciens. On les rencontre dans la distribution de l'énergie électrique et dans les moteurs électriques mais aussi dans de multiples domaines de l'électronique et du traitement de signal.

Prérequis :

Quelques éléments de trigonométrie.

La notion de vecteur et de somme vectorielle.

La notion de complexe et de somme de complexes.

Objectifs :

Ce chapitre présente plusieurs méthodes pour faire la somme de fonctions alternatives sinusoïdales (par exemple pour appliquer une loi des mailles ou une loi des nœuds).

Méthode de travail :

Dans l'imaginaire de nombreux apprenants, un savoir est d'autant plus sérieux qu'il est « mathématique ». Dans ce chapitre, nous essaierons de nous convaincre qu'un savoir est d'autant plus intéressant qu'il est **efficace** pour résoudre un problème.

L'utilisation des vecteurs de Fresnel en est un bon exemple... Si quelques traits à main levée permettent d'avoir une bonne approximation du résultat recherché, pourquoi s'en priver avant d'effectuer éventuellement un calcul plus précis à la calculatrice ou avec des moyens informatiques!

Travail en autonomie :

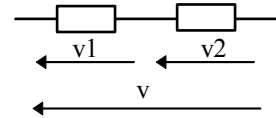
Pour permettre une étude du cours de façon autonome, les réponses aux questions du cours sont données en fin de document.

Corrigés en ligne :

Pour permettre une vérification autonome des exercices, consulter « Baselecpro » (chercher « baselecpro accueil » sur Internet avec un moteur de recherche)

2 SOMME DE FONCTIONS ALTERNATIVES SINUSOÏDALES DE MEME FREQUENCE.

En électricité, il est fréquent de devoir faire la somme de fonctions alternatives sinusoïdales **de même fréquence**.



On veut par exemple calculer $v(t)$ ci-contre sachant que

$$v_1(t) = \hat{V}_1 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \hat{V}_2 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_2)$$

Avec $\hat{V}_1 = \text{constante}$; $\hat{V}_2 = \text{constante}$; $\omega = \text{constante}$; $\varphi_1 = \text{constante}$ et $\varphi_2 = \text{constante}$

2.1 Somme en utilisant les expressions analytiques.

$$\text{Soit } v(t) = v_1(t) + v_2(t) = \hat{V}_1 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_1) + \hat{V}_2 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_2)$$

$$\Rightarrow v(t) = \hat{V}_1 [\cos(\omega.t) \cdot \cos(\varphi_1) - \sin(\omega.t) \cdot \sin(\varphi_1)] + \hat{V}_2 [\cos(\omega.t) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\omega.t) \cdot \sin(\varphi_2)]$$

$$\Rightarrow v(t) = [\hat{V}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{V}_2 \cdot \cos(\varphi_2)] \cos(\omega.t) - [\hat{V}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{V}_2 \cdot \sin(\varphi_2)] \sin(\omega.t)$$

$$\text{Posons: } [\hat{V}_1 \cdot \cos(\varphi_1) + \hat{V}_2 \cdot \cos(\varphi_2)] = A \quad \text{et} \quad [\hat{V}_1 \cdot \sin(\varphi_1) + \hat{V}_2 \cdot \sin(\varphi_2)] = B$$

$$\Rightarrow v(t) = A \cdot \cos(\omega.t) - B \cdot \sin(\omega.t) = A \left[\cos(\omega.t) - \frac{B}{A} \sin(\omega.t) \right]$$

$$\text{Posons: } \frac{B}{A} = \text{tg}(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

$$\Rightarrow v(t) = A \cdot \left[\cos(\omega.t) - \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \sin(\omega.t) \right] = \frac{A}{\cos(\varphi)} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\omega.t) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\omega.t)]$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{A}{\cos(\varphi)} \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$$

$$\text{Remarque: } \text{tg}^2(\varphi) = \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \frac{1 - \cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2(\varphi)} = 1 + \text{tg}^2(\varphi)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{A}{\cos(\varphi)} \right)^2 = A^2 [1 + \text{tg}^2(\varphi)] = A^2 \cdot \left(1 + \frac{B^2}{A^2} \right) = A^2 + B^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos(\omega.t + \varphi)}$$

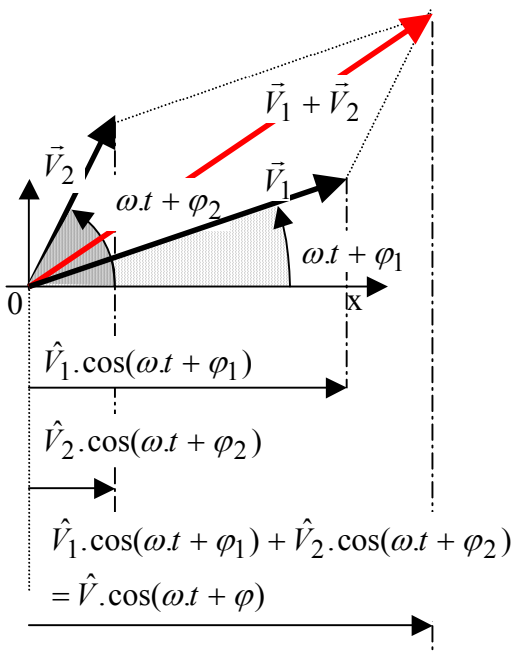
$v(t)$ est une fonction alternative sinusoïdale de même fréquence que $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

Cette façon de calculer est longue, nous ne l'utiliserons jamais !

2.2 Somme point par point en utilisant les représentations graphiques ou par tableau de points.

C'est la façon dont travaille un oscilloscope ou certains logiciels; mais ce n'est pas très pratique lorsqu'il faut le faire à la main...

2.3 Somme en utilisant les vecteurs de Fresnel.



Soit à calculer la somme de deux fonctions alternatives sinusoïdales de **même pulsation** : $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$.

Avec $v_1(t) = \hat{V}_1 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_1)$ et

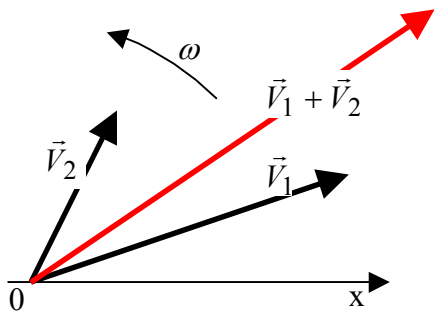
$v_2(t) = \hat{V}_2 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_2)$.

On sait que cette somme est une fonction alternative sinusoïdale de même pulsation (voir § précédent): $v(t) = \hat{V} \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$ avec \hat{V} et φ à calculer.

Si on représente les vecteurs de Fresnel \vec{V}_1 et \vec{V}_2 associés à $v_1(t)$ et à $v_2(t)$, On constate que la projection du vecteur $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ sur l'axe ox est égale à : $\hat{V}_1 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_1) + \hat{V}_2 \cdot \cos(\omega.t + \varphi_2)$ donc à $v(t) = \hat{V} \cdot \cos(\omega.t + \varphi)$.

Donc la somme des vecteurs de Fresnel \vec{V}_1 et \vec{V}_2 associés à $v_1(t)$ et $v_2(t)$ est le vecteur de Fresnel \vec{V} associé à $v(t)$:

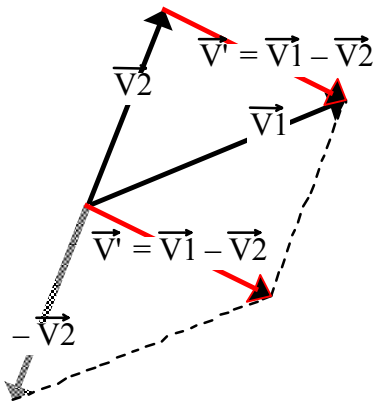
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$



Les trois vecteurs de Fresnel tournent à la même vitesse angulaire ω .

\Rightarrow L'ensemble est donc indéformable au cours du temps.

On peut le tracer à un **instant quelconque** et en déduire l'**amplitude** de la somme et son **déphasage par rapport à** $v_1(t)$ ou à $v_2(t)$.



On peut de même démontrer que si $v'(t) = v_1(t) - v_2(t)$ (avec $v_1(t)$ et $v_2(t)$ de même fréquence), alors $\vec{V}' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$.

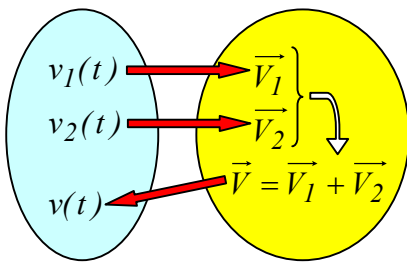
Ces conclusions peuvent être étendues à un nombre quelconque de fonctions alternatives sinusoïdales **de même fréquence**:

Par exemple:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) - v_3(t) + v_4(t) \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 - \vec{V}_3 + \vec{V}_4$$

Remarque : Seuls nous importent le module et la position angulaire des vecteurs. (La localisation du vecteur $\vec{V}' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ sur la page est sans importance).

Résumé de la méthode pour déterminer $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ par les vecteurs de Fresnel:



Pour un instant quelconque, associer des vecteurs de Fresnel \vec{V}_1 et \vec{V}_2 à $v_1(t)$ et à $v_2(t)$.

En déduire le vecteur de Fresnel $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

En déduire l'amplitude de $v(t)$ et son déphasage par rapport à $v_1(t)$ ou $v_2(t)$.

On fait de même pour une différence.

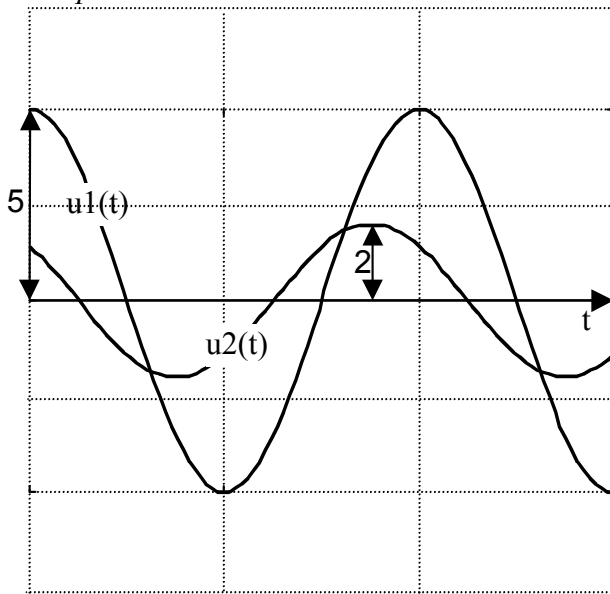
Cette méthode est plus pratique que la précédente, mais sa précision dépend de la qualité du dessin.

*En général, nous n'utiliserons cette méthode que pour obtenir un **ordre de grandeur** de la somme. Le calcul précis se fera à la calculatrice par la méthode des complexes (ci-après).*

Exemple N°1: $v_1(t) = 3 \cdot \cos(\omega t)$, $v_2(t) = 4 \cdot \sin(\omega t)$. Uniquement par un diagramme de Fresnel (1) à main levée, déterminer approximativement $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$. *(Réponse 1:)*

(1) diagramme de Fresnel = ensemble de vecteurs de Fresnel associés à une situation donnée.

Exemple N°2 :



Par un diagramme de Fresnel (2) à main levée, déterminer approximativement l'amplitude de $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ et l'ordre de grandeur de son déphasage par rapport à $u_1(t)$. Représenter ensuite le graphe de $u(t)$.

Faire de même avec $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$.

(Réponse 2:)

2.4 Somme en utilisant les complexes.

La maîtrise de l'outil mathématique est supposée acquise (3).

Soit $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ avec $v_1(t) = \hat{V}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $v_2(t) = \hat{V}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$

En utilisant les formules d'Euler:

$$v_1(t) = \hat{V}_1 \cdot \frac{e^{j(\omega t + \varphi_1)} + e^{-j(\omega t + \varphi_1)}}{2} \quad \text{et} \quad v_2(t) = \hat{V}_2 \cdot \frac{e^{j(\omega t + \varphi_2)} + e^{-j(\omega t + \varphi_2)}}{2}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\hat{V}_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} + \hat{V}_2 \cdot e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t} + \hat{V}_1 \cdot e^{-j\varphi_1} \cdot e^{-j\omega t} + \hat{V}_2 \cdot e^{-j\varphi_2} \cdot e^{-j\omega t} \right]$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[(\hat{V}_1 \cdot e^{j\varphi_1} + \hat{V}_2 \cdot e^{j\varphi_2}) e^{j\omega t} + (\hat{V}_1 \cdot e^{-j\varphi_1} + \hat{V}_2 \cdot e^{-j\varphi_2}) e^{-j\omega t} \right]$$

La somme $(\hat{V}_1 \cdot e^{j\varphi_1} + \hat{V}_2 \cdot e^{j\varphi_2})$ est égale à un complexe qu'on peut calculer

Soit $\hat{V} \cdot e^{j\varphi}$ le résultat de cette somme : $\boxed{\hat{V}_1 \cdot e^{j\varphi_1} + \hat{V}_2 \cdot e^{j\varphi_2} = \hat{V} \cdot e^{j\varphi}}$

De même $\hat{V}_1 \cdot e^{-j\varphi_1} + \hat{V}_2 \cdot e^{-j\varphi_2} = \hat{V} \cdot e^{-j\varphi}$ (Car la somme des conjugués est égale au conjugué de la somme)

(2) diagramme de Fresnel = ensemble de vecteurs de Fresnel associés à une situation donnée.

(3) On pourra consulter : [SimulElecPro – Chapitre 2 - § 2.4](http://www.iutenligne.net/ressources/electricite_electrotechnique/Piou/simulelecpro/2/24.html) :

http://www.iutenligne.net/ressources/electricite_electrotechnique/Piou/simulelecpro/2/24.html

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2} \left[\hat{V} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} + \hat{V} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega t} \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{V} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} + \hat{V} \cdot e^{-j(\omega t + \varphi)} \right]$$

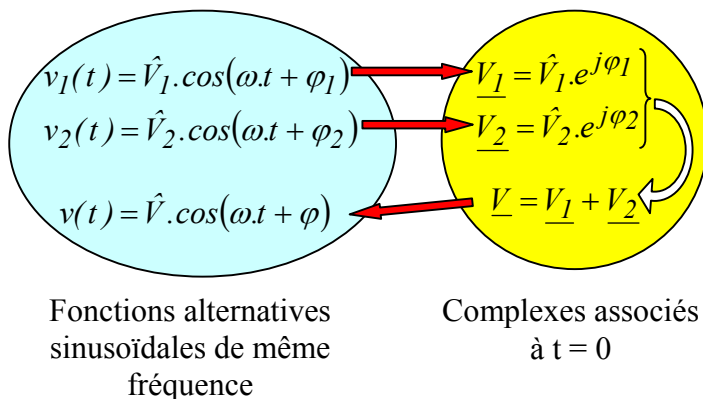
$$\Rightarrow \boxed{v(t) = \hat{V} \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$$

Pour une fréquence (et donc une pulsation ω) donnée, on constate que dans la démonstration précédente, seuls \hat{V}_1 , \hat{V}_2 , \hat{V} , φ_1 , φ_2 et φ sont variables. On peut donc tout oublier de la démonstration précédente pour ne retenir que $\boxed{\hat{V}_1 \cdot e^{j\varphi_1} + \hat{V}_2 \cdot e^{j\varphi_2} = \hat{V} \cdot e^{j\varphi}}$

On en déduit donc qu'il suffit de prendre en compte les complexes $\hat{V}_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ et $\hat{V}_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ associés à $v_1(t)$ et $v_2(t)$ pour $t = 0$.

En calculant la somme, on trouve ainsi les valeurs de \hat{V} et de φ dont on peut déduire $v(t) = \hat{V} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$.

Résumé de la méthode pour déterminer $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ par les complexes:



Associer des complexes à $v_1(t)$ et à $v_2(t)$ à l'instant $t = 0$. En déduire le complexe $\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = \hat{V} \cdot e^{j\varphi}$.

En déduire l'amplitude \hat{V} de $v(t)$ et sa phase φ à $t = 0$.

En déduire $v(t)$.

Cette méthode est bien adaptée à l'usage de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul mathématique. Elle donne des résultats précis.

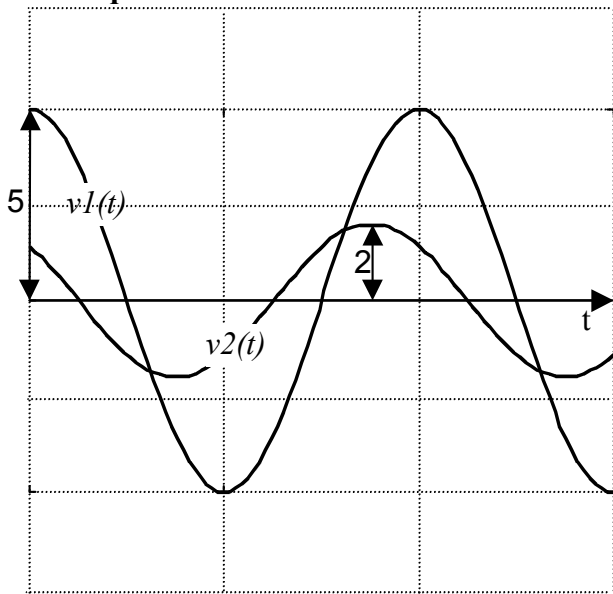
Mais qui dit calculatrice dit risque d'erreur de frappe, aussi est-il conseillé, avant tout calcul, de représenter un diagramme de Fresnel (à main levée).

Pour éviter de confondre les fonctions alternatives sinusoïdales avec leur complexe associé (à $t = 0$), on écrira les fonctions en **noir** ou en **bleu**, et les complexes en **vert** ou en **rouge**.

Exemple: $v_1(t) = 3 \cdot \cos(\omega t)$, $v_2(t) = 4 \cdot \sin(\omega t)$. Calculer $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ par les complexes (en respectant les couleurs ci-dessus). Comparer le résultat à celui de l'exemple N°1 du paragraphe 2.3.

Faire de même pour $v'(t) = v_1(t) - v_2(t)$.

(Réponse 3:)

Remarque :

Pour déterminer la somme $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ lorsque l'instant origine ($t = 0$) n'est pas imposé (par exemple lors d'un relevé à l'oscilloscope), il est intéressant de **choisir l'une des grandeurs comme « référence »** par exemple $t = 0$ est choisi tel que $v_1(t) = \hat{V}_1 \cdot \cos(\omega t)$. Dans ce cas $\varphi_1 = 0$ et donc φ_2 et φ sont les déphasages de $v_2(t)$ et de $v(t)$ par rapport à $v_1(t)$.

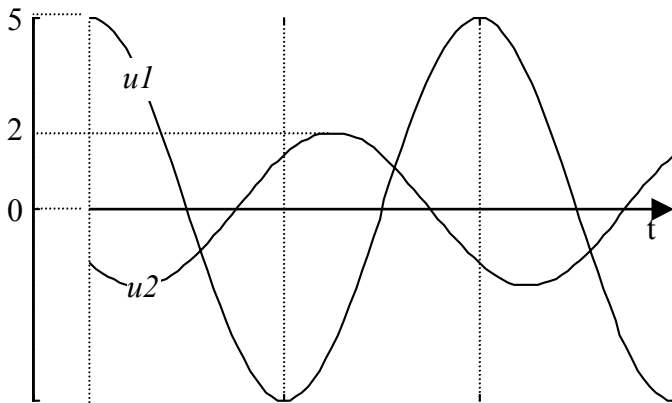
Pour l'exemple ci-contre, calculer par les complexes l'amplitude \hat{V} de $v(t)$ et son déphasage φ par rapport à $v_1(t)$ puis représenter $v(t)$.

(Réponse 4:)

En conclusion, on constate dans cet exemple que le calcul de \hat{V} et de φ ne nécessite pas de se référer au temps. Il suffit de choisir une des grandeurs alternatives sinusoïdales comme référence (4).

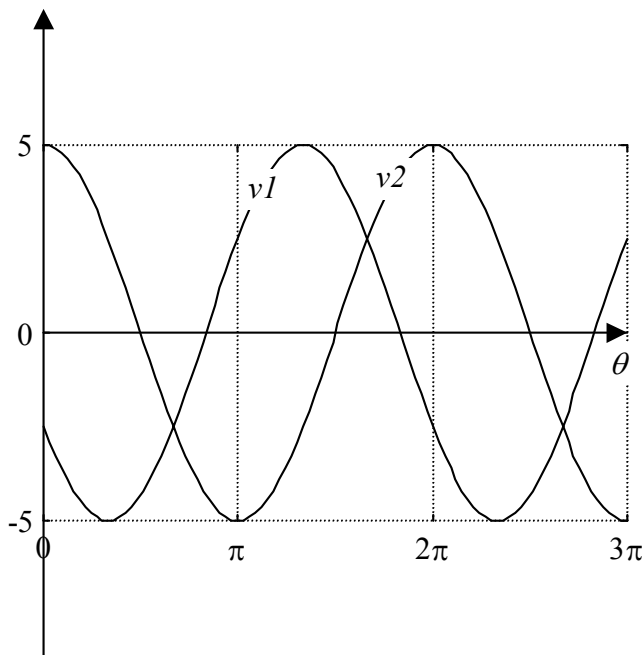
3 PROBLEMES ET EXERCICES

Chap 4. Exercice 1 : Somme par les diagrammes de Fresnel.



Par un diagramme de Fresnel à main levée, déterminer approximativement l'amplitude de $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ et l'ordre de grandeur de son déphasage par rapport à $u_1(t)$. Représenter ensuite le graphe de $u(t)$.

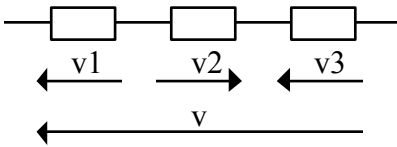
Chap 4. Exercice 2 : Différence par les diagrammes de Fresnel.



Par un diagramme de Fresnel à main levée, déterminer approximativement l'amplitude de $v(\theta) = v_1(\theta) - v_2(\theta)$ et l'ordre de grandeur de son déphasage par rapport à $v_1(\theta)$. Représenter ensuite le graphe de $v(\theta)$.

Remarque : Que la variable s'appelle θ ou t ne change rien.

Chap 4. Exercice 3 : Loi des branches



Soient trois dipôles en série soumis à des tensions alternatives sinusoïdales de même fréquence:

$$v1(t) = 50.\cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{3}\right) ;$$

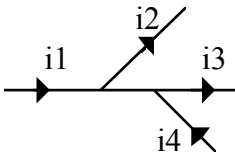
$$v2(t) = 25.\sin(\omega.t) ;$$

$$v3(t) = 10.\sin(\omega.t + 0,8) .$$

A l'aide d'un diagramme de Fresnel à main levée, donner une estimation de $v(t)$.

En utilisant les complexes et la calculatrice, calculer $v(t)$.

Chap 4. Exercice 4 : Loi des nœuds



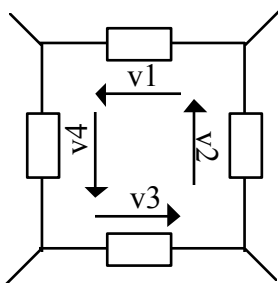
Soient quatre conducteurs reliés entre eux et parcourus par des courants alternatifs sinusoïdaux de même fréquence:

$$i2(t) = 10.\cos(\omega.t) ; i3(t) = 15.\sin\left(\omega.t + \frac{\pi}{3}\right) ; i4(t) = -12.\cos(\omega.t) .$$

A l'aide d'un diagramme de Fresnel à main levée, donner une estimation de $i1(t)$.

En utilisant les complexes et la calculatrice, calculer $i1(t)$.

Chap 4. Exercice 5 : Loi des mailles



Dans l'ensemble d'un montage électrique, on considère la maille ci-contre.

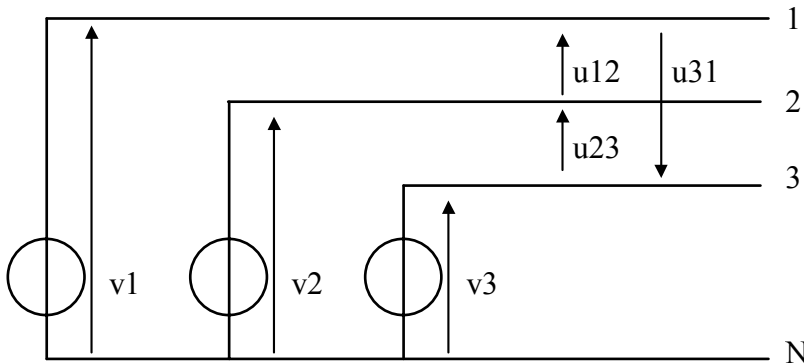
$$v1(t) = 12.\cos(\omega.t) ; \quad v2(t) = 12.\cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{et } v3(t) = -11.\cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A l'aide d'un diagramme de Fresnel à main levée, donner une estimation de $v4(t)$.

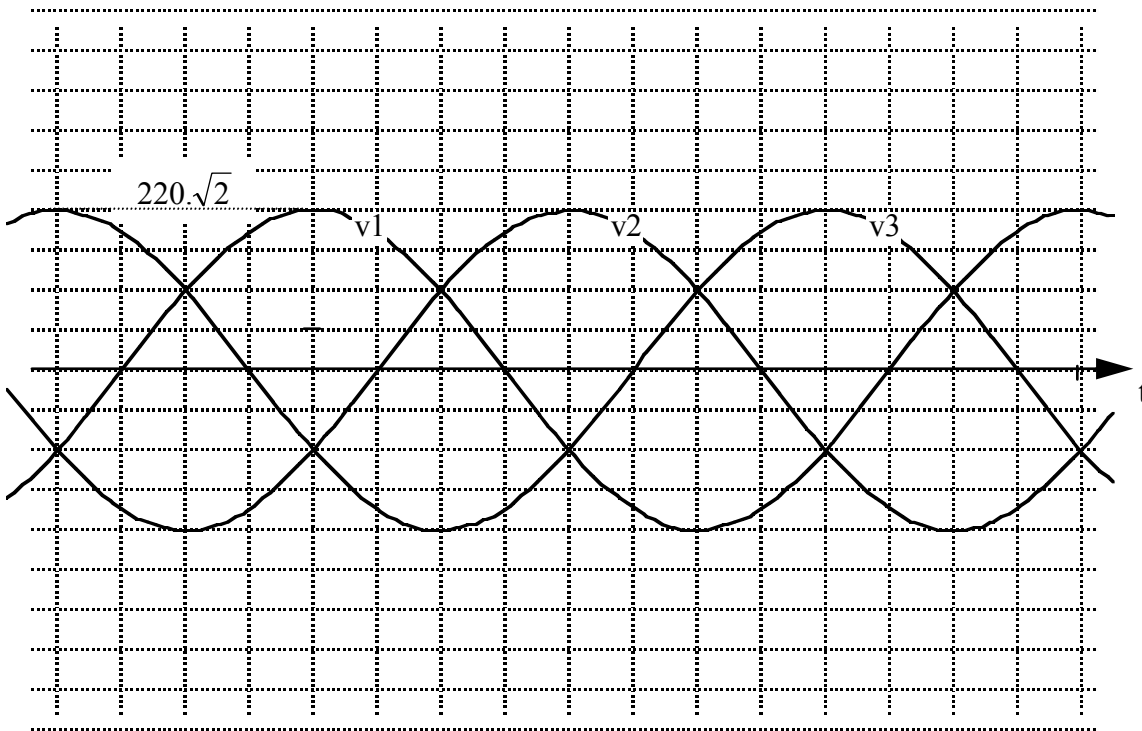
En utilisant les complexes et la calculatrice, calculer $v4(t)$.

Chap 4. Exercice 6 : Tensions alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées



Une ligne électrique triphasée est constituée de quatre conducteurs numérotés 1, 2, 3 et N. Elle est alimentée par trois sources de tensions alternatives sinusoïdales: v_1 , v_2 et v_3 de même fréquence : 50 Hz.

On a relevé avec un oscilloscope les graphes de $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$:



Représenter $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ et en déduire les vecteurs de Fresnel $\vec{U}_{12}, \vec{U}_{23}$ et \vec{U}_{31} à un instant quelconque.

Exprimer \underline{V}_2 et \underline{V}_3 en prenant \underline{V}_1 comme référence (On dit aussi que v_1 est « origine des phases »).

(On prend donc $\underline{V}_1 = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j0}$) et en déduire les complexes $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}$ et \underline{U}_{31} .

Représenter ci dessus $u_{12}(t), u_{23}(t)$ et $u_{31}(t)$.

4 CE QUE J'AI RETENU DU CHAPITRE « LA SOMME DES SIGNAUX ALTERNATIFS SINUSOÏDAUX DE MEME FREQUENCE».

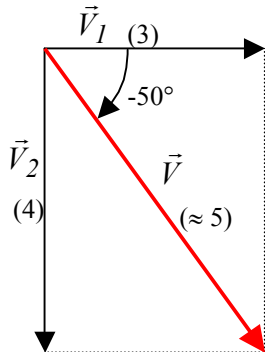
L'objectif de ce questionnaire est de vous aider à évaluer vous-même votre connaissance du cours. Il est conseillé de répondre sur une feuille de papier et de ne pas se contenter du sentiment d'avoir « entendu parler ».

- Décrire la façon de faire la somme ou la différence de deux fonctions alternatives sinusoïdales en utilisant les vecteurs de Fresnel.
- Décrire la façon de faire la somme ou la différence de deux fonctions alternatives sinusoïdales en utilisant les complexes.
- Si les fonctions alternatives sinusoïdales de même fréquence sont données sous forme analytique, rédiger la méthode permettant d'obtenir la somme ou la différence de ces fonctions.
(Réponse 5:)
- Si les fonctions alternatives sinusoïdales de même fréquence sont données sous forme graphique, rédiger la méthode permettant d'obtenir la somme ou la différence de ces fonctions.
(Réponse 6:)
- Si les fonctions alternatives sinusoïdales de même fréquence sont données sous forme de vecteurs de Fresnel ou de complexes, on obtient la somme ou la différence de ces fonctions sous la même forme, puis on en déduit son amplitude et son déphasage par rapport aux autres fonctions.

5 REPONSES AUX QUESTIONS DU COURS.

Réponse 1:

$$v_1(t) = 3.\cos(\omega.t) ; v_2(t) = 4.\cos\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

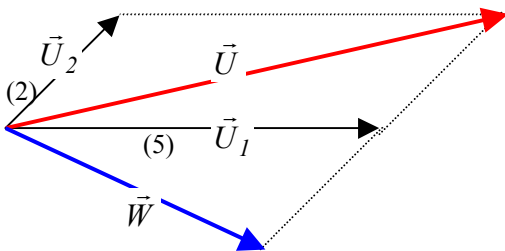


$v(t) \approx 5 \cos(\omega.t - "50^{\circ}")$ (Pour ne pas confondre degrés et radians, nous avons choisi de mettre les grandeurs en degrés entre guillemets) ou $v(t) \approx 5 \cos(\omega.t - 0,9)$

[Retour](#)

Réponse 2:

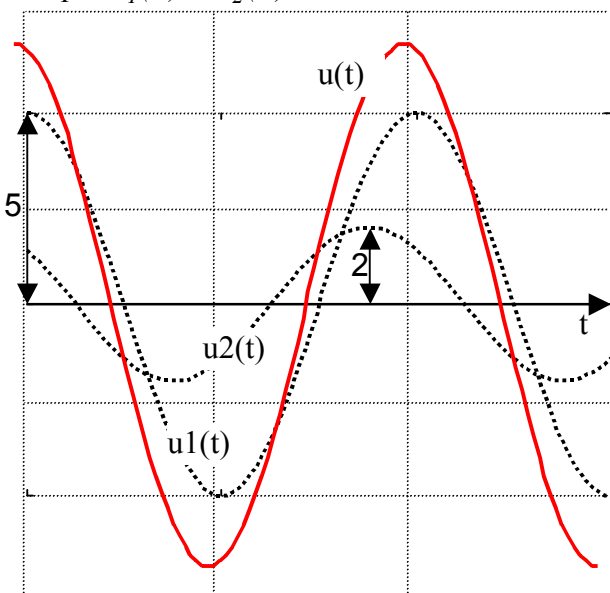
$u_2(t)$ est déphasé de $+\frac{\pi}{4}$ par rapport à $u_1(t)$



Les vecteurs de Fresnel peuvent être représentés à un instant quelconque.

$$u(t) \approx 6,5 \cos(\omega.t + "10^{\circ}") \text{ ou } u(t) \approx 6,5 \cos(\omega.t + 0,2) , w(t) \approx 4 \cos(\omega.t - "20^{\circ}").$$

Remarque : sur le graphe, $u(t)$ passe par zéro lorsque $u_1(t) = -u_2(t)$ et $w(t)$ passe par zéro lorsque $u_1(t) = u_2(t)$



[Retour](#)

Réponse 3:

$$v_1(t) = 3.\cos(\omega t) \Rightarrow \underline{V}_1 = 3.e^{j0}, \quad v_2(t) = 4.\sin(\omega t) = 4.\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \underline{V}_2 = 4.e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \Leftrightarrow \underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = 3.e^{j0} + 4.e^{-j\frac{\pi}{2}} = 3 - 4j = 5.e^{-j0,93} = 5.e^{-j''53,1^\circ}$$

(à la calculatrice)

$$\Leftrightarrow v(t) = 5.\cos(\omega t - 0,93)$$

$$v'(t) = v_1(t) - v_2(t) \Leftrightarrow \underline{V}' = \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = 3.e^{j0} - 4.e^{-j\frac{\pi}{2}} = 3 + 4j = 5.e^{+j0,93} = 5.e^{+j''53,1^\circ}$$

$$\Leftrightarrow v'(t) = 5.\cos(\omega t + 0,93).$$

[Retour](#)**Réponse 4:**

$$\underline{V}_1 = 5.e^{j0}, \quad \underline{V}_2 = 2.e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \Leftrightarrow \underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = 5.e^{j0} + 2.e^{j\frac{\pi}{4}} = 6,57.e^{j0,217} = 6,57.e^{j''12,4^\circ}$$

$$v(t) = 6,57.\cos(\omega t + 0,217)$$

Comparer au résultat approximatif obtenu par un diagramme de Fresnel à main levée...

[Retour](#)**Réponse 5:**

- Mettre les fonctions à sommer sous la forme $\hat{V}.\cos(\omega.t + \varphi)$ avec $\hat{V} > 0, \omega > 0$ et φ quelconque (5).
- Tracer (à main levée) les vecteurs de Fresnel associés à ces fonctions (par exemple à $t = 0$).
- Représenter le vecteur somme (ou le vecteur différence).
- Si la démarche précédente n'est pas assez précise, effectuer la même démarche en utilisant les complexes et la calculatrice (attention aux couleurs utilisées pour l'écriture) (6). Le résultat du calcul doit confirmer le résultat approximatif déterminé à l'aide des vecteurs de Fresnel.
- Connaissant la somme (ou la différence) vectorielle ou complexe, revenir à l'expression analytique (avec la couleur d'écriture associée aux fonctions du temps).

[Retour](#)**Réponse 6:**

- Choisir une des fonctions alternatives sinusoïdales comme référence.
- Tracer (à main levée) le vecteur de Fresnel associés à cette fonction référence, puis les vecteurs de Fresnel associés aux autres fonctions à sommer. (Les modules et les déphasages par rapport à la référence doivent être cohérents avec les fonctions considérées).
- Représenter le vecteur somme (ou le vecteur différence).
- Si la démarche précédente n'est pas assez précise, effectuer la même démarche en utilisant les complexes et la calculatrice (attention aux couleurs utilisées pour l'écriture). Le résultat du calcul doit confirmer le résultat approximatif déterminé à l'aide des vecteurs de Fresnel.
- Connaissant la somme (ou la différence) vectorielle ou complexe, en déduire l'amplitude et le déphasage de la fonction somme (ou différence) par rapport à la référence. [Retour](#)

(5) On aurait pu prendre une autre convention (par exemple en sinus).

(6) Cette insistance sur les couleurs peut paraître ridicule. Elle a pourtant fait ses preuves pendant de nombreuses années d'enseignement.