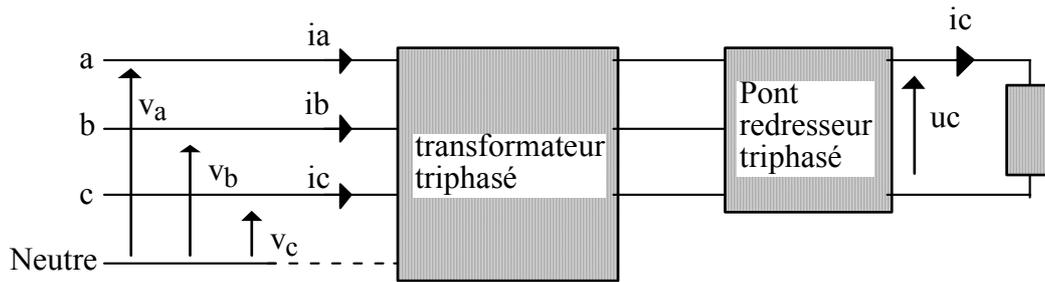


Spectre des courants dans l'association Transformateur triphasé + redresseur + charge.

Corrigé



* Les tensions $v_a(t)$, $v_b(t)$ et $v_c(t)$ sont alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées de sens direct, de période T et de pulsation $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ tels que $v_a(t) = \hat{V} \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

* Les courants $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$ forment un système triphasé équilibré ⁽¹⁾ de sens direct. Le neutre n'est pas relié.

$$i_a(t) = I_{moy} + \hat{I}_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi_1) + \hat{I}_2 \cdot \sin(2\omega t - \varphi_2) + \dots + \hat{I}_n \cdot \sin(n\omega t - \varphi_n) + \dots$$

$$i_b(t) = I_{moy} + \hat{I}_1 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_1\right) + \hat{I}_2 \cdot \sin\left[2\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_2\right] + \dots + \hat{I}_n \cdot \sin\left[n\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] + \dots$$

$$i_c(t) = I_{moy} + \hat{I}_1 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi_1\right) + \hat{I}_2 \cdot \sin\left[2\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_2\right] + \dots + \hat{I}_n \cdot \sin\left[n\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] + \dots$$

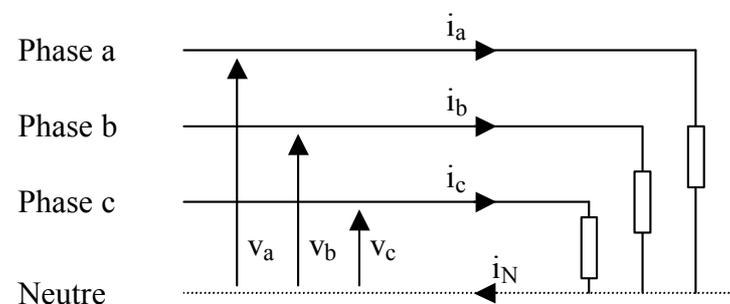
a) Si le neutre est relié : $i_N(t) = i_a(t) + i_b(t) + i_c(t)$

La série de Fourier de $i_N(t)$ est donc :

$$i_N(t) = 3 \cdot I_{moy} + 0 + 0 + 3 \cdot \hat{I}_3 \cdot \sin(3\omega t - \varphi_3) + 0 + 0 + 3 \cdot \hat{I}_6 \cdot \sin(6\omega t - \varphi_6) + \dots + 3 \cdot \hat{I}_{3n} \cdot \sin(3n\omega t - \varphi_{3n}) + \dots$$

Si le neutre n'est pas relié : $i_N(t) = 0$. Tous les termes de sa série de Fourier sont donc nuls. Donc $I_{moy} = 0$.

Tous les harmoniques 3 et multiples de 3 des courants $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$ sont également nuls.



b) Exprimons la puissance instantanée transportée par la ligne triphasée:

La ligne triphasée est soumise à des tensions $v_a(t)$, $v_b(t)$ et $v_c(t)$, et est parcourue par des courants $i_a(t)$, $i_b(t)$, $i_c(t)$ et $i_N(t)$ qu'elle délivre à sa charge.

Il est toujours possible de simuler le comportement de cette charge par trois dipôles montés en étoile qui, pour les mêmes tensions, engendreront les mêmes courants.

⁽¹⁾ Mais pas alternatif sinusoïdal...

La loi de conservation de l'énergie précise que la puissance électrique instantanée totale consommée par la charge est la somme des puissances électrique instantanées consommées par chaque élément.

$$p_e(t) = v_a(t).i_a(t) + v_b(t).i_b(t) + v_c(t).i_c(t)$$

En remplaçant chaque courant et chaque tension par sa série de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned} p_e(t) &= \hat{V}. \sin(\omega t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \cdot \sin(n\omega t - \varphi_n) \right] + \hat{V}. \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \cdot \sin\left(n\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_n\right) \right] \\ &+ \hat{V}. \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_n \cdot \sin\left(n\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_n\right) \right] \\ \Rightarrow p_e(t) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{V} \cdot \hat{I}_n \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(n\omega t - \varphi_n) \right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{V} \cdot \hat{I}_n \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(n\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_n\right) \right] \\ &+ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{V} \cdot \hat{I}_n \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(n\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_n\right) \right] \end{aligned}$$

Sachant que $\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_e(t) &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{V} \cdot \hat{I}_n}{2} \cdot \left\{ \cos[(n-1)\omega t - \varphi_n] - \cos[(n+1)\omega t - \varphi_n] \right\} \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{V} \cdot \hat{I}_n}{2} \cdot \left\{ \cos\left[(n-1)\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] - \cos\left[(n+1)\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] \right\} \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{V} \cdot \hat{I}_n}{2} \cdot \left\{ \cos\left[(n-1)\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] - \cos\left[(n+1)\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] \right\} \right\} \\ \Rightarrow p_e(t) &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{V} \cdot \hat{I}_n}{2} \cdot \left\{ \cos[(n-1)\omega t - \varphi_n] + \cos\left[(n-1)\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] + \cos\left[(n-1)\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] \right\} \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{V} \cdot \hat{I}_n}{2} \cdot \left\{ \cos[(n+1)\omega t - \varphi_n] + \cos\left[(n+1)\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] + \cos\left[(n+1)\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

Remarque :

$$\text{Si } k \text{ n'est pas nul ni multiple de } 3 : \cos[k.\omega t - \varphi_k] + \cos\left[k.\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_k\right] + \cos\left[k.\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_k\right] = 0$$

(C'est la somme de trois fonctions alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées de même fréquence)

Si k est un multiple de 3 :

$$\cos[k.\omega.t - \varphi_k] + \cos\left[k.\left(\omega.t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_k\right] + \cos\left[k.\left(\omega.t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_k\right] = 3.\cos[k.\omega.t - \varphi_k]$$

$$p_e(t) = \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_1}{2}.\cos(\varphi_1) - \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_2}{2}.\cos(3.\omega.t - \varphi_2) + \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_4}{2}.\cos(3.\omega.t - \varphi_4) \\ - \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_5}{2}.\cos(6.\omega.t - \varphi_5) + \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_7}{2}.\cos(6.\omega.t - \varphi_7) - \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_8}{2}.\cos(9.\omega.t - \varphi_8) + \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_{10}}{2}.\cos(9.\omega.t - \varphi_{10}) - \dots$$

- c) *Donc dans le cas de tensions alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées et de courants triphasés équilibrés, La puissance instantanée transportée par la ligne prend en compte tous les harmoniques des courants sauf les harmoniques de rang 3 et multiples de 3.*

Si le neutre n'est pas relié au transformateur triphasé, les harmoniques des courants $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$ de fréquence $3f$ et multiples de $3f$ sont nuls. (voir la question a).

Donc dans ce cas, l'expression de $p_e(t)$ prend en compte tous les harmoniques des courants.

La charge du pont redresseur reçoit une puissance instantanée $p_c(t) = u_c(t).i_c(t)$. En général, la fonction puissance instantanée dans la charge est de même période que la tension à ses bornes. Donc :

- Si la tension $p_c(t)$ est de période $T/3$ (par exemple avec un montage P3)

$$\Rightarrow p_c(t) = P_{moy} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{P}_{3k} \cdot \sin(3k\omega.t + \alpha_{3k}) \right)$$

\Rightarrow Dans ce cas la fonction puissance instantanée dans la charge ne contient en plus de sa valeur moyenne que des harmoniques de pulsation 3ω , 6ω , 9ω , 12ω ,...etc

- Si la tension $p_c(t)$ est de période $T/6$ (par exemple avec un montage PD3 à 6 thyristors)

$$\Rightarrow p_c(t) = P_{moy} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{P}_{6k} \cdot \sin(6k\omega.t + \alpha_{6k}) \right)$$

\Rightarrow Dans ce cas la fonction puissance instantanée dans la charge ne contient en plus de sa valeur moyenne que des harmoniques de pulsation 6ω , 12ω , 18ω , 24ω ,...etc

- On suppose le transformateur triphasé idéal (résistances des bobinages négligeables, pertes fer négligeables, fuites négligeables, inductances principales infinies). On suppose également que le transformateur est couplé sans neutre au primaire ⁽²⁾ et le pont redresseur idéal (pertes nulles).

Sachant que la puissance instantanée est conservative, on en déduit par identification des harmoniques de $p_e(t)$ et $p_c(t)$ que:

⁽²⁾ Si le primaire comporte un fil neutre, et que les courants secondaires présentent des harmoniques homopolaires (harmoniques 3 et multiples de 3) (cela suppose un neutre au secondaire), les courants primaires peuvent présenter des harmoniques homopolaires sans influence sur la puissance instantanée. Ces harmoniques homopolaires peuvent être étudiés séparément par la méthode des composantes symétriques et le théorème de superposition.

- Si $p_c(t)$ est de période $T/3$, les courants en ligne ne comportent que des harmoniques de rang 1 ; 2 et/ou 4 ; 5 et/ou 7 ; 8 et/ou 10 ... etc
- Si $p_c(t)$ est de période $T/6$, les courants en ligne ne comportent que des harmoniques de rang 1 ; 5 et/ou 7 ; 11 et/ou 13 ; 17 et/ou 19 ... etc
- Si $p_c(t)$ est de période $T/12$, les courants en ligne ne comportent que des harmoniques de rang 1 ; 11 et/ou 13 ; 23 et/ou 25 ; 35 et/ou 37 ... etc

⇒ Plus la période de la tension (et donc de la puissance instantanée) de sortie du pont redresseur sera faible par rapport à la période de la tension d'alimentation de la ligne triphasée (plus l'ordre du redressement sera élevé), et plus les harmoniques des courants de ligne seront de rangs élevés, et donc plus leur filtrage sera facilité.