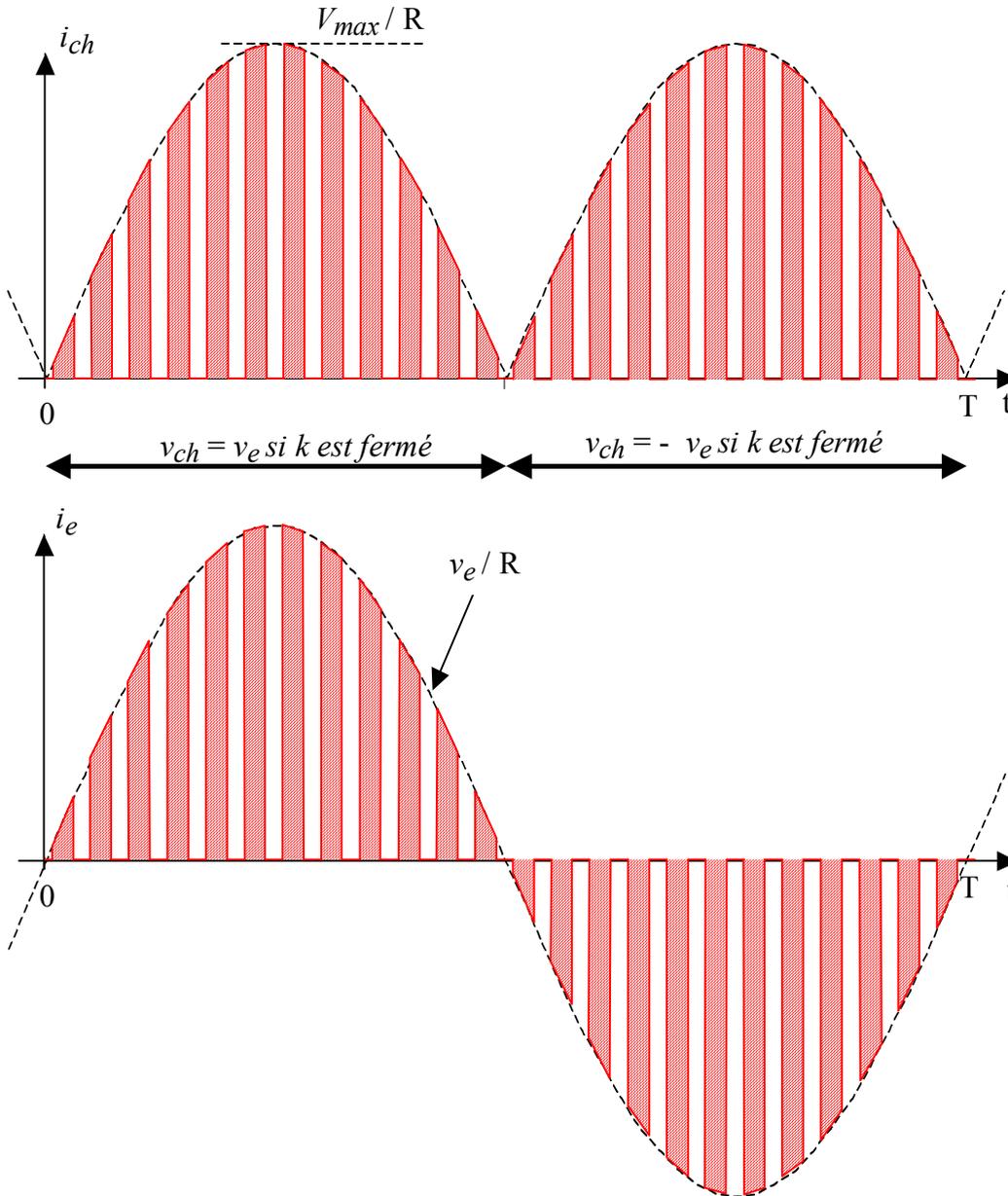


Redresseur à modulation de largeur d'impulsion. Corrigé

A - CHARGE RESISTIVE ET MODULATION A RAPPORT CYCLIQUE CONSTANT

a) Les convertisseurs à liaison directe conservent la puissance instantanée ; donc $v_e(t) \cdot i_e(t) = v_{ch}(t) \cdot i_{ch}(t)$.

b) Lorsque l'interrupteur « k » est fermé, $v_{ch}(t) = |v_e(t)|$ et $i_{ch}(t) = \frac{v_{ch}(t)}{R}$



De la conservation de la puissance instantanée on déduit :

$$i_e(t) = \frac{v_{ch}(t) \cdot i_{ch}(t)}{v_e(t)}$$

Lorsque $v_{ch}(t) = v_e(t)$:

$$i_e(t) = i_{ch}(t)$$

Lorsque $v_{ch}(t) = -v_e(t)$:

$$i_e(t) = -i_{ch}(t)$$

D'où le graphe de $i_e(t)$ ci-contre.

c) On remarque que le courant $i_e(t)$ est le produit d'une sinusoïde par un signal carré d'amplitude 1.

Ce signal peut s'exprimer par la série de Fourier
$$i_e(t) = \frac{V_{\max}}{R} \cdot \sin(\omega t) \cdot \left[a + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin(i \cdot a \cdot \pi)}{i \cdot \pi} \cdot \cos(i \cdot \omega' t + \beta_i) \right]$$

$$\Leftrightarrow i_e(t) = a \cdot \frac{V_{\max}}{R} \cdot \sin(\omega t) + \frac{V_{\max}}{R} \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \sin(a \cdot \pi)}{\pi} \cdot \cos(\omega' t + \beta_1)$$

$$+ \frac{V_{\max}}{R} \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \sin(2a \cdot \pi)}{2\pi} \cdot \cos(2 \cdot \omega' t + \beta_2) + \dots$$

$$\Leftrightarrow i_e(t) = a \cdot \frac{V_{\max}}{R} \cdot \sin(\omega t) + \frac{V_{\max}}{R} \cdot \frac{2 \cdot \sin(a\pi)}{\pi} \cdot [\sin(\omega t) \cdot \cos(\omega' t + \beta_1)]$$

$$+ \frac{V_{\max}}{R} \cdot \frac{2 \cdot \sin(2a\pi)}{2\pi} \cdot [\sin(\omega t) \cdot \cos(2\omega' t + \beta_2)] + \dots$$

$$\Leftrightarrow i_e(t) = a \cdot \frac{V_{\max}}{R} \cdot \sin(\omega t) + \frac{V_{\max}}{R} \cdot \frac{2 \cdot \sin(a\pi)}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin(\omega t - \omega' t - \beta_1) + \sin(\omega t + \omega' t + \beta_1)}{2} \right]$$

$$+ \frac{V_{\max}}{R} \cdot \frac{2 \cdot \sin(2a\pi)}{2\pi} \cdot \left[\frac{\sin(\omega t - 2\omega' t - \beta_2) + \sin(\omega t + 2\omega' t + \beta_2)}{2} \right] + \dots$$

$$\Leftrightarrow i_e(t) = a \cdot \frac{V_{\max}}{R} \cdot \sin(\omega t) - \frac{V_{\max}}{\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \cdot \sin[(\omega' - \omega)t + \beta_1] + \frac{V_{\max}}{\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \cdot \sin[(\omega' + \omega)t + \beta_1]$$

$$- \frac{V_{\max}}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(2a\pi)}{2\pi} \cdot \sin[(2\omega' - \omega)t + \beta_2] + \frac{V_{\max}}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(2a\pi)}{2\pi} \cdot \sin[(2\omega' + \omega)t + \beta_2] + \dots$$

Sachant que $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 50$ et $\omega' = 2\pi \cdot f' = 2\pi \cdot 25000$:

$$i_e(t) = a \cdot \frac{V_{\max}}{R} \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

$$+ \frac{V_{\max}}{\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \cdot \sin[(2\pi \cdot 24950)t + \beta_1 + \pi] + \frac{V_{\max}}{\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \cdot \sin[(2\pi \cdot 25050)t + \beta_1]$$

$$+ \frac{V_{\max}}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(2a\pi)}{2\pi} \cdot \sin[(2\pi \cdot 49950)t + \beta_2 + \pi] + \frac{V_{\max}}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(2a\pi)}{2\pi} \cdot \sin[(2\pi \cdot 50050)t + \beta_2] + \dots$$

L'harmonique 1 (dit harmonique fondamental) $i_{e1}(t)$ a pour amplitude $a \cdot \frac{V_{\max}}{R}$ et pour fréquence 50 Hz

Le second harmonique non nul a pour amplitude $\frac{V_{\max}}{\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(a\pi)}{\pi}$ et pour fréquence 24950 Hz

Le troisième harmonique non nul a pour amplitude $\frac{V_{\max}}{\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(a\pi)}{\pi}$ et pour fréquence 25050 Hz

Le quatrième harmonique non nul a pour amplitude $\frac{V_{\max}}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(2a\pi)}{2\pi}$ et pour fréquence 49950 Hz

Le cinquième harmonique non nul a pour amplitude $\frac{V_{\max}}{2\pi \cdot R} \cdot \frac{\sin(2a\pi)}{2\pi}$ et pour fréquence 50050 Hz

La tension $v_e(t)$ est alternative sinusoïdale de fréquence 50 Hz, donc seul l'harmonique de $i_e(t)$ de même fréquence intervient dans la puissance active

$$\text{Donc } P = \frac{V_{e\max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{e1\max}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\vec{V}_e, \vec{I}_{e1}) = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a \cdot V_{\max}}{\sqrt{2} \cdot R} \cdot \cos(0) = \frac{a \cdot V_{\max}^2}{2 \cdot R}$$

Le facteur de déplacement (DPF ou $\cos(\varphi_1)$) est $\cos(\vec{V}_e, \vec{I}_{e1}) = \cos(0) = 1$, car $v_e(t)$ et $i_{e1}(t)$ sont en phase.

Ce convertisseur étant à « liaison directe », il ne consomme aucune puissance et donc la puissance active (ou puissance moyenne) $P = \frac{a.V_{\max}^2}{2.R}$ en entrée est égale à la puissance $P = R.I_{ch\text{eff}}^2$ dans la charge « R ».

$$\text{Donc } R.I_{ch\text{eff}}^2 = \frac{a.V_{\max}^2}{2.R} \Leftrightarrow I_{ch\text{eff}} = \sqrt{\frac{a.V_{\max}^2}{2.R^2}} = \frac{V_{\max} \cdot \sqrt{a}}{R \cdot \sqrt{2}}$$

Sachant que $i_e(t)^2 = i_{ch}(t)^2$, on en déduit d'après la définition de la valeur efficace $I_{e\text{eff}} = I_{ch\text{eff}} = \frac{V_{\max} \cdot \sqrt{a}}{R \cdot \sqrt{2}}$

Sachant que $I_{e\text{eff}} = \frac{V_{\max} \cdot \sqrt{a}}{R \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{I_{e1\text{eff}}^2 + I_{e2\text{eff}}^2 + I_{e3\text{eff}}^2 + \dots}$, (car la valeur moyenne de $i_e(t)$ est nulle), on en déduit le « taux de distorsion harmonique (ou « Total Harmonic Distorsion ») :

$$THD = \frac{\sqrt{I_{e2\text{eff}}^2 + I_{e3\text{eff}}^2 + \dots}}{I_{e1\text{eff}}} = \frac{\sqrt{I_{e\text{eff}}^2 - I_{e1\text{eff}}^2}}{I_{e1\text{eff}}} = \sqrt{\frac{I_{e\text{eff}}^2}{I_{e1\text{eff}}^2} - 1} = \sqrt{\frac{\frac{a.V_{\max}^2}{2R^2}}{\left(\frac{a.V_{\max}}{R \cdot \sqrt{2}}\right)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{a} - 1}$$

Le facteur de puissance (Power Factor) se définit par $PF = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{e\text{eff}} \cdot I_{e\text{eff}}} = \frac{\frac{a.V_{\max}^2}{2.R}}{\frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V_{\max} \cdot \sqrt{a}}{R \cdot \sqrt{2}}} = \sqrt{a}$

La tension $v_e(t)$ étant alternative sinusoïdale et la valeur moyenne de $i_e(t)$ étant nulle, on peut aussi utiliser la relation :

$$PF = \frac{DPF}{\sqrt{1 + THD^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a} - 1\right)}} = \sqrt{a}$$

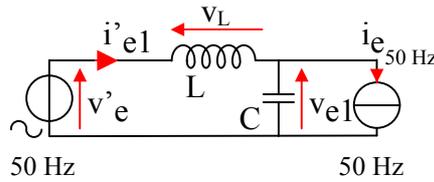
B - MISE EN ŒUVRE D'UN FILTRE SUR LA LIGNE D'ALIMENTATION

a) Le facteur de puissance est un critère de qualité d'une transmission de puissance électrique, car

Puissance active transmise par une ligne : $P = V_{e\text{eff}} \cdot I_{e\text{eff}} \cdot \text{facteur de puissance}$

Donc, pour une tension et une puissance données : plus le facteur de puissance est élevé et plus la valeur efficace du courant est faible. Et donc plus les pertes Joule dans les résistances parasites de la ligne d'alimentation sont faibles.

b) Schéma équivalent permettant le calcul de l'harmonique fondamental (à 50 Hz) de v_e et i'_e :



c)

Par l'application du théorème de superposition, on obtient :

$$\underline{V}_{e_{50\text{ Hz}}} = \underline{V}'_{e_{50\text{ Hz}}} \cdot \frac{\frac{-j}{C\omega}}{jL\omega - \frac{j}{C\omega}} + \frac{I_{e_{50\text{ Hz}}}}{\frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \underline{V}'_{e_{50\text{ Hz}}} \cdot \frac{1}{-LC\omega^2 + 1} + \frac{I_{e_{50\text{ Hz}}} \cdot jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$\text{Donc } \underline{V}_{e_{50\text{ Hz}}} \approx \underline{V}'_{e_{50\text{ Hz}}} \Leftrightarrow LC\omega^2 \ll 1 \text{ et } \left| I_{e_{50\text{ Hz}}} \right| \cdot L\omega \ll \left| V'_{e_{50\text{ Hz}}} \right| \text{ (avec } \omega = 2.50.\pi = 100\pi \text{ rad/s)}$$

(On note $\omega_o = 2\pi.500 = 1000.\pi \text{ rad/s}$ la pulsation propre du filtre telle que $LC\omega_o^2 = 1$)

$$\text{La première condition est vérifiée car } LC\omega^2 = LC\omega_o^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 = 1 \cdot \left(\frac{2\pi.50}{2\pi.500}\right)^2 = 0,01$$

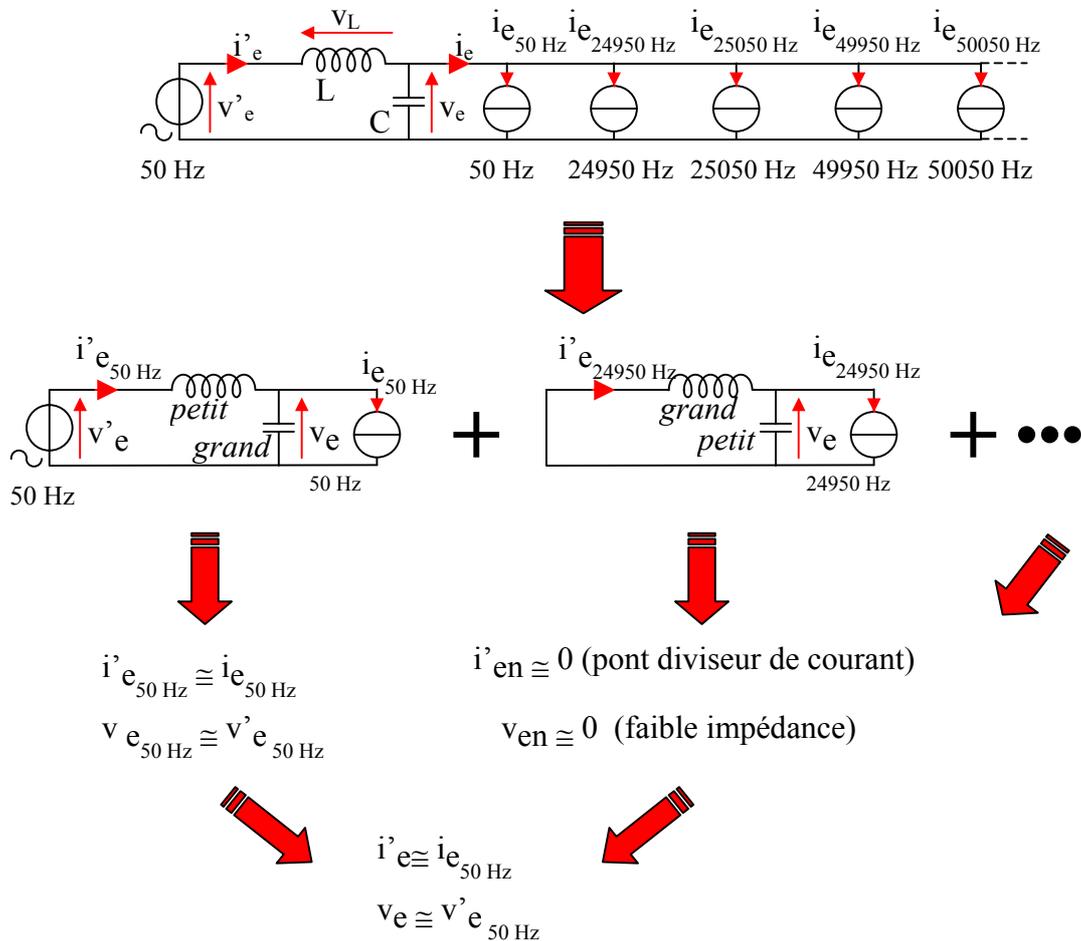
$$\text{La seconde condition implique : } a \cdot \frac{V_{\max}}{R} \cdot L\omega \ll V_{\max} \Leftrightarrow \frac{aL\omega}{R} \ll 1 .$$

Cette relation doit être vérifiée quelque soit la valeur de « $0 < a < 1$ », donc il faut: $L\omega \ll R$ (ce qui est le cas d'après l'hypothèses : $L.100.\pi \ll R$).

d) A 50 Hz : $\omega \ll \omega_o \Rightarrow L.C.\omega^2 \ll 1 \Rightarrow L.\omega \ll \frac{1}{C.\omega}$

A 24950 Hz et aux fréquences supérieures: $\omega \gg \omega_o \Rightarrow L.C.\omega^2 \gg 1 \Rightarrow L.\omega \gg \frac{1}{C.\omega}$

On peut appliquer le théorème de superposition :



En première approximation, seul l'harmonique fondamental du courant dans la charge est présent dans la source $v'_e(t)$, la valeur du facteur de puissance de la source $v'_e(t)$ est donc proche de 1 car $v'_e(t)$ et $i'_{e1}(t)$ sont en phase.

Le convertisseur est soumis à la tension d'alimentation $v'_e(t)$

e) Soit « r » la résistance parasite de la ligne d'alimentation.

Sans filtre, les pertes Joule dans r s'expriment par $P_{Joule\ sans} = r \cdot I_{eff}^2 = r \cdot \left(\frac{V_{max} \cdot \sqrt{a}}{R \cdot \sqrt{2}} \right)^2$

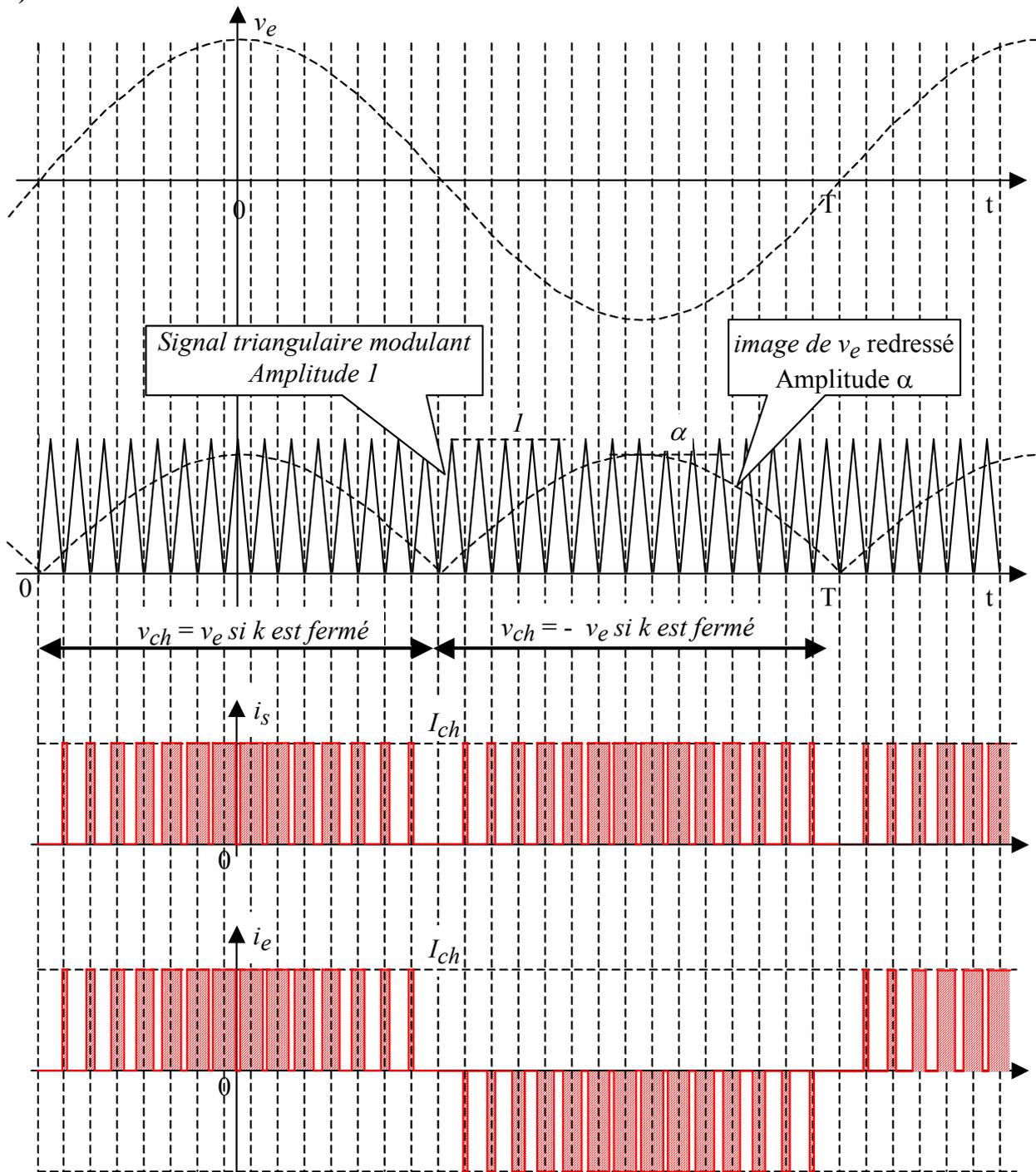
Avec un filtre, les pertes Joule dans r s'expriment par $P_{Joule\ avec} = r \cdot I'_{eff}{}^2 = r \cdot I_{e1\ eff}{}^2 = r \cdot \left(\frac{a \cdot V_{max}}{R \cdot \sqrt{2}} \right)^2$

$$\text{Donc : } \frac{P_{Joule\ avec}}{P_{Joule\ sans}} = \frac{r \cdot \left(\frac{a \cdot V_{max}}{R \cdot \sqrt{2}} \right)^2}{r \cdot \left(\frac{V_{max} \cdot \sqrt{a}}{R \cdot \sqrt{2}} \right)^2} = a$$

Par exemple, pour un rapport cyclique de 1/2, les pertes joule en ligne sont deux fois plus faibles avec le filtre que sans celui-ci... et les risques d'oscillations dues aux phénomènes de résonance sur un harmonique sont nuls.

C - CHARGE TRES INDUCTIVE ET MODULATION EN SINUS

a)

b) $i_e(t)$ présente deux particularités :

Compte tenu du choix de l'origine, c'est une fonction paire, donc les « B_n » de sa série de Fourier sont nuls. $i_e(t)$ présente une symétrie de glissement, donc ses harmoniques de rang pair sont nuls.

c) L'intérêt d'ajouter au montage un filtre LC du type utilisé dans la question B est le même que dans la question B : rendre le courant $i'_{e1}(t)$ dans la ligne d'alimentation alternatif sinusoïdal en phase avec la tension $v'_e(t)$.

Ainsi le facteur de puissance vaut 1 ; les pertes joule en ligne sont réduites et les risques d'oscillations dues aux phénomènes de résonance sur un harmonique sont nuls.