

GENIE ELECTRIQUE

Conversion statique d'énergie

Michel Piou

Puissance et harmoniques (monophasé et triphasé) Chapitre VI

Edition 24/11/2010

Extrait de la ressource en ligne **PowerElecPro** sur le site Internet **iutenligne.net**

Table des matières

1 POURQUOI ET COMMENT ?	1
2 LA SERIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PERIODIQUE	2
3 VALEUR EFFICACE	5
4 PUISSANCE LORSQUE $v(t)$ ET $i(t)$ SONT PERIODIQUES DE MEME PERIODE.	5
4.1 Puissance active dans un dipôle lorsque $v(t)$ et $i(t)$ sont périodiques de même période.	5
4.2 Facteur de puissance.....	6
5 PUISSANCE LORSQUE $v(t)$ EST ALTERNATIF SINUSOÏDAL ET $i(t)$ PERIODIQUE DE MEME PERIODE. ...	7
5.1 Puissance active lorsque $v(t)$ est alternatif sinusoïdal et $i(t)$ périodique de même période. .	7
5.2 Puissance apparente et puissance déformante lorsque $v(t)$ est alternatif sinusoïdal et $i(t)$ périodique de même période.....	7
5.3 Facteur de puissance lorsque $v(t)$ est alternatif sinusoïdal et $i(t)$ périodique de même période.....	9
6 SERIES DE FOURIER ET TRIPHASE EQUILIBRE.....	11
7 PUISSANCE EN TRIPHASE EQUILIBRE	13
8 CE QUE J'AI RETENU DE CE CHAPITRE.....	15
9 PROBLEMES	16
Chap 6. Exercice 1 : Harmoniques basse fréquence sur le réseau 50 Hz.....	16
Chap 6. Exercice 2 : Echange d'énergie électrique et filtrage.	18
Chap 6. Exercice 3 : Redresseur à modulation de largeur d'impulsion.....	19
Chap 6. Exercice 4 : Pont redresseur triphasé à diodes débitant sur une charge capacitive	23
Chap 6. Exercice 5 : Harmoniques dans une ligne triphasée avec des charges équilibrées non linéaires	24
Chap 6. Exercice 6 : Onduleur de courant triphasé.....	28
Chap 6. Exercice 7 : Puissance instantanée et harmoniques en triphasé équilibré	30
10 REPONSES AUX QUESTIONS DU COURS	32

Copyright : droits et obligations des utilisateurs

Ce document est extrait de la ressource *PowerElecPro* qui est disponible en version numérique sur le site Internet *IUT en ligne*

Je ne renonce pas à ma qualité d'auteur et aux droits moraux qui s'y rapportent du fait de la publication de mon document.

Les utilisateurs sont autorisés à faire un usage non commercial, personnel ou collectif, de ce document et de la ressource *PowerElecPro*, notamment dans les activités d'enseignement, de formation ou de loisirs. Tout ou partie de cette ressource ne doit pas faire l'objet d'une vente - en tout état de cause, une copie ne peut pas être facturée à un montant supérieur à celui de son support.

Pour tout extrait de ce document, l'utilisateur doit maintenir de façon lisible le nom de l'auteur *Michel Piou*, la référence à *PowerElecPro* et au site *Internet IUT en ligne*.

Michel PIOU - Agrégé de génie électrique – IUT de Nantes - FRANCE

1 POURQUOI ET COMMENT ?

Prérequis :

Le premier chapitre « introduction à l'électronique de puissance », le second chapitre « Conversion DC→DC (hacheurs). Convertisseurs à liaison directe et indirecte », le troisième chapitre « Conversion DC→AC. Onduleurs », le quatrième chapitre « conversion AC→DC. Redressement monophasé » et le cinquième chapitre « conversion AC→DC. Redressement triphasé ».

Objectifs :

Dans le troisième chapitre, nous avons déjà parlé des séries de Fourier avec, comme application, la mise en œuvre de l'approximation au premier harmonique.

Dans ce nouveau chapitre, l'objectif est de faire le lien entre la série de Fourier d'un courant ou d'une tension et les conséquences de cette « pollution harmonique » sur la qualité d'une transmission d'énergie électrique.

Méthode de travail :

L'exposé « académique » sur les propriétés des séries de Fourier reprend ce qui a déjà été énoncé au chapitre 3. Ceci est complété par des considérations sur les relations séries de Fourier/puissance et séries de Fourier/triphasé équilibré.

Il est important d'**apprendre par cœur dès maintenant** certains résultats car ces connaissances sont aujourd'hui fondamentales dans le métier d'électronicien de puissance.

Travail en autonomie :

Pour permettre une étude du cours de façon autonome, les réponses aux questions du cours sont données en fin de document.

On trouvera des compléments dans la ressource en ligne « PowerElecPro »

Temps de travail estimé pour un apprentissage de ce chapitre en autonomie : 20h

2 LA SERIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PERIODIQUE

En électricité, on sait assez bien étudier le régime continu et le régime alternatif sinusoïdal.

Or une fonction périodique est égale à sa valeur moyenne plus une somme de fonctions alternatives sinusoïdales (1)

Cette somme est appelée "**série de Fourier**" de la fonction :

- Toute fonction $f(t)$ périodique de période T (fréquence $f = \frac{1}{T}$) peut se mettre sous la forme:

$$f(t) = F_{moy} + [A_1 \cdot \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t)] + [A_2 \cdot \cos(2\omega t) + B_2 \cdot \sin(2\omega t)] + [A_3 \cdot \cos(3\omega t) + B_3 \cdot \sin(3\omega t)] + \dots + [A_n \cdot \cos(n\omega t) + B_n \cdot \sin(n\omega t)] + \dots$$

avec $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$

et avec $A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$ et $B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$

(to quelconque)

- Si $f(t)$ est une **fonction paire** $\Rightarrow f(t) \cdot \sin(n\omega t)$ est une fonction impaire.

En choisissant $t_0 = -\frac{T}{2}$ et sachant que l'aire sous la courbe d'une fonction impaire sur

$$\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right] \text{ est nulle } \Rightarrow B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt = 0 \Rightarrow : \boxed{B_n = 0}$$

... et $f(t) \cdot \cos(n\omega t)$ est une fonction paire $\Rightarrow A_n = \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$

- Si la **composante alternative** de $f(t)$ est une **fonction impaire** $\Rightarrow (f(t) - F_{moy}) \cos(n\omega t)$ est une fonction impaire

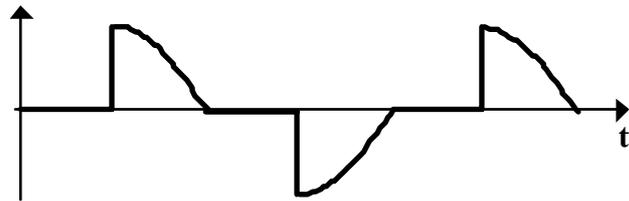
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} (f(t) - F_{moy}) \cos(n\omega t) dt}_0 = \underbrace{\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt}_{A_n} - \underbrace{\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F_{moy} \cos(n\omega t) dt}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = 0}$$

(1) ...sous réserve que la somme converge (ce qui sera généralement le cas en électricité).

- Si la **composante alternative** de $f(t)$: $f_{alt}(t) = (f(t) - F_{moy})$ présente une **symétrie de glissement** (c'est à dire si $f_{alt}(t + \frac{T}{2}) = -f_{alt}(t)$), alors tous les termes de la série de Fourier de **rang pair** sont **nuls**:

Exemple:



$$A_2 = A_4 = A_6 = \dots = 0$$

$$B_2 = B_4 = B_6 = \dots = 0$$

- Autre écriture d'une série de Fourier :

Le terme général $[A_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)]$ est la somme de deux fonctions alternatives sinusoïdales de même fréquence. Cette somme peut donc s'effectuer en utilisant les complexes ou les vecteurs de Fresnel. On obtient alors :

$$A_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t - \varphi_n) \text{ avec } \varphi_n = \arctg \frac{B_n}{A_n}$$

La série de Fourier peut donc s'écrire :

$$f(t) = F_{moy} + F_{1max} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_1) + F_{2max} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi_2) + F_{3max} \cdot \cos(3 \cdot \omega \cdot t - \varphi_3) + \dots + F_{nmax} \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t - \varphi_n) + \dots$$

La fonction $f_1(t) = F_{1max} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_1)$ est appelée 1er harmonique (ou harmonique **fondamental**).

La fonction $f_n(t) = F_{nmax} \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t - \varphi_n)$ est appelée harmonique de rang n.

Les amplitudes F_{max} des harmoniques sont indépendantes de l'origine choisie sur l'axe des abscisses, on aura donc intérêt à choisir celle-ci de façon à rendre la fonction étudiée paire ou impaire lorsque c'est possible.

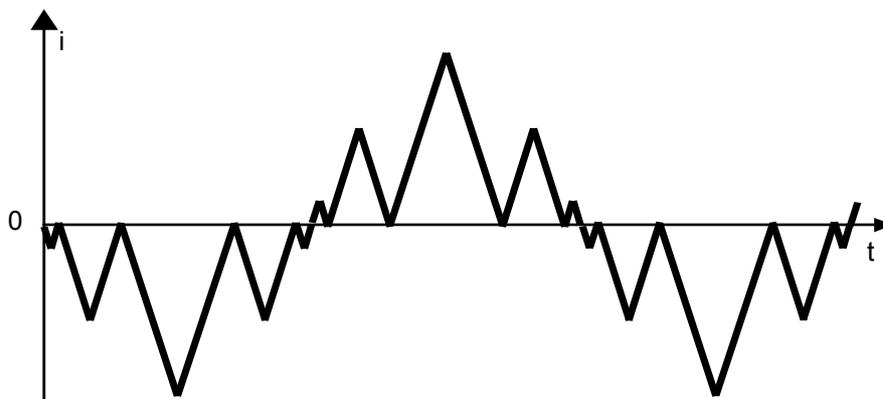
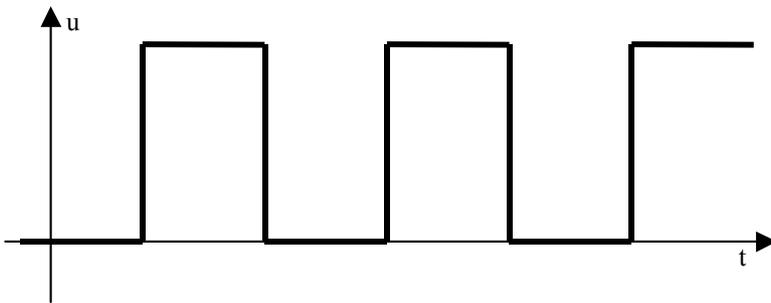
On démontre que $F_{l_{max}}$ et φ_1 sont tels que:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} [f(t) - F_{moy} - F_{l_{max}} \cdot \cos(\omega.t - \varphi_1)]^2 .dt \text{ est minimum.}$$

On peut dire que la fonction $f_1(t) = F_{l_{max}} \cdot \cos(\omega.t - \varphi_1)$ est la sinusoïde qui suit "au plus près" la composante alternative de la fonction $f(t)$...

Ou que la fonction $f_1(t) = F_{l_{max}} \cdot \cos(\omega.t - \varphi_1) + F_{moy}$ **suit "au plus près"** la fonction $f(t)$ (2)

Sur les deux exemples suivants, représenter une estimation de la valeur moyenne et de la somme « valeur moyenne + fondamental » de la fonction périodique. ([Réponse 1:](#))



(2) Cette formulation n'est pas très "mathématique", mais elle peut nous aider à donner une dimension plus intuitive à la notion de série de Fourier, et à situer le fondamental d'une fonction périodique avant tout calcul.

3 VALEUR EFFICACE

Par définition, la valeur efficace d'une fonction $f(t)$ est « la Racine carrée de la valeur Moyenne de la fonction $f(t)$ au Carré ». (En anglais : Racine se dit Root, Moyenne se dit Mean et Carré se dit Square) d'où le sigle « RMS » pour les appareils qui mesurent les valeurs efficaces.

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2 dt}$$

Si la série de Fourier de $f(t)$ est :

$$f(t) = F_{moy} + F_{1max} \cdot \cos(\omega.t - \varphi_1) + F_{2max} \cdot \cos(2.\omega.t - \varphi_2) + \dots + F_{nmax} \cdot \cos(n.\omega.t - \varphi_n) + \dots$$

On peut montrer que

$$F_{eff} = \sqrt{(F_{moy})^2 + (F_{1eff})^2 + (F_{2eff})^2 + \dots + (F_{neff})^2 + \dots}$$

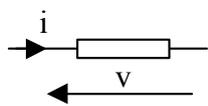
avec $F_{neff} = \frac{F_{nmax}}{\sqrt{2}}$.

Cette relation doit être connue par cœur.

De la relation précédente, on déduit que $F_{eff} \geq |F_{moy}|$ et que l'écart entre F_{eff} et $|F_{moy}|$ croît avec l'importance des harmoniques.

4 PUISSANCE LORSQUE $v(t)$ ET $i(t)$ SONT PERIODIQUES DE MEME PERIODE.

4.1 Puissance active dans un dipôle lorsque $v(t)$ et $i(t)$ sont périodiques de même période.



Si la tension et le courant dans un dipôle sont périodiques de même période T , ils peuvent être décrits par des séries de Fourier avec la même pulsation: $\omega = \frac{2.\pi}{T}$

$$v(t) = V_{moy} + V_{1max} \cdot \cos(\omega.t + \alpha_1) + V_{2max} \cdot \cos(2.\omega.t + \alpha_2) + \dots + V_{nmax} \cdot \cos(n.\omega.t + \alpha_n) + \dots$$

$$i(t) = I_{moy} + I_{1max} \cdot \cos(\omega.t + \beta_1) + I_{2max} \cdot \cos(2.\omega.t + \beta_2) + \dots + I_{nmax} \cdot \cos(n.\omega.t + \beta_n) + \dots$$

En développant l'expression de la puissance active $P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t).i(t).dt$, on obtient l'expression suivante:

$$P = V_{moy} \cdot I_{moy} + V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1) + V_{2eff} \cdot I_{2eff} \cdot \cos(\varphi_2) + \dots + V_{neff} \cdot I_{neff} \cdot \cos(\varphi_n) + \dots$$

$$\text{avec } V_{n_{eff}} = \frac{V_{n_{max}}}{\sqrt{2}}, I_{n_{eff}} = \frac{i_{n_{max}}}{\sqrt{2}}$$

et $\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$ (déphasage de l'harmonique n de la tension par rapport à l'harmonique n du courant).

Cette relation s'ajoute à celles qui ont déjà été rencontrées dans les cours précédents. Elle doit être connue par cœur.

Retrouver à partir de l'expression générale de P les cas particuliers

* $v(t) = V_o = \text{constante}$

* $i(t) = I_o = \text{constante}$

* $v(t)$ et $i(t)$ alternatifs sinusoïdaux de même période

* $v(t)$ alternatif sinusoïdal et $i(t)$ périodique de même période

* $i(t)$ alternatif sinusoïdal et $v(t)$ périodique de même période

(Réponse 2:)

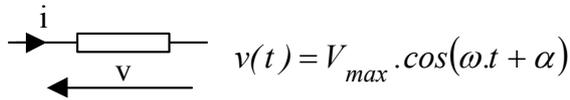
4.2 Facteur de puissance

On peut démontrer que dans le cas où la tension et le courant sont périodiques de même période, le **facteur de puissance** (3) $k = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{eff} \cdot I_{eff}}$ **du dipôle est toujours inférieur ou égal à 1** (ce résultat sera admis):

(3) Sur certains appareils de mesure, le facteur de puissance est désigné par les lettres « pf » pour « power factor ».

5 PUISSANCE LORSQUE $v(t)$ EST ALTERNATIF SINUSOÏDAL ET $i(t)$ PÉRIODIQUE DE MEME PERIODE.

5.1 Puissance active lorsque $v(t)$ est alternatif sinusoïdal et $i(t)$ périodique de même période.



➤ Le courant périodique peut se décomposer en une série de Fourier :

$$i(t) = I_{moy} + I_{1max} \cdot \cos(\omega.t + \beta_1) + I_{2max} \cdot \cos(2.\omega.t + \beta_2) + \dots + I_{nmax} \cdot \cos(n.\omega.t + \beta_n) + \dots$$

➤ **La série de Fourier de la tension se limite à son fondamental :** .

$v(t) = V_{max} \cdot \cos(\omega.t + \alpha) = V_{1max} \cdot \cos(\omega.t + \alpha)$. Sa valeur moyenne est nulle et tous les harmoniques autres que le fondamental sont nuls.

➤ En développant l'expression de la puissance active :

$$P = V_{moy} \cdot I_{moy} + V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1) + V_{2eff} \cdot I_{2eff} \cdot \cos(\varphi_2) + \dots + V_{neff} \cdot I_{neff} \cdot \cos(\varphi_n) + \dots,$$

tous les termes de cette somme sont nuls sauf $V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1)$

On obtient donc l'expression suivante: $P = V_{eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1)$

$$\text{Avec } V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}, \quad I_{1eff} = \frac{I_{1max}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \alpha - \beta_1$$

Dans ce cas, seul le premier harmonique du courant intervient dans la puissance active échangée. ⁽⁴⁾

5.2 Puissance apparente et puissance déformante lorsque $v(t)$ est alternatif sinusoïdal et $i(t)$ périodique de même période.

Par définition, la **puissance apparente** dans le dipôle s'exprime par : $S = V_{eff} \cdot I_{eff}$ donc :

$$S = V_{eff} \cdot \sqrt{(I_{moy})^2 + (I_{1eff})^2 + (I_{2eff})^2 + \dots + (I_{neff})^2 + \dots}$$

⁽⁴⁾ Pour la mesure de P , on peut utiliser un wattmètre dont la bande passante est seulement supérieure à la fréquence de la tension.

Si on se place dans le cas particulier (très fréquent) où $I_{moy} = 0$:

$$\Leftrightarrow S = \sqrt{\left\{ \left(V_{eff} \right)^2 \cdot \left(I_{1eff} \right)^2 \right\} + \left\{ \left(V_{eff} \right)^2 \left[\left(I_{2eff} \right)^2 + \dots + \left(I_{neff} \right)^2 + \dots \right] \right\}}$$

$$\text{avec } \left(V_{eff} \right)^2 \cdot \left(I_{1eff} \right)^2 = \left(V_{eff} \right)^2 \cdot \left(I_{1eff} \right)^2 \cdot \left(\cos^2(\varphi_1) + \sin^2(\varphi_1) \right)$$

$$= \underbrace{\left(V_{eff} \right)^2 \cdot \left(I_{1eff} \right)^2 \cdot \cos^2(\varphi_1)}_{P^2} + \underbrace{\left(V_{eff} \right)^2 \cdot \left(I_{1eff} \right)^2 \cdot \sin^2(\varphi_1)}_{Q_1^2}$$

« P » : **puissance active.**

« Q_1 » : **puissance réactive portée par le fondamental.**

Le terme $D = \sqrt{\left\{ \left(V_{eff} \right)^2 \left[\left(I_{2eff} \right)^2 + \dots + \left(I_{neff} \right)^2 + \dots \right] \right\}}$ est appelé « **puissance déformante** »

La puissance déformante rend compte, de manière globale, de la présence des harmoniques ⁽⁵⁾

En conclusion : $S = \sqrt{P^2 + Q_1^2 + D^2}$

⁽⁵⁾ On trouve maintenant à des prix abordables des appareils de mesure capable de mesurer chaque harmonique basse fréquence des courants et des tensions. La notion de puissance déformante qui propose une description « globale » des harmoniques autres que le fondamental est donc moins pertinente.

5.3 Facteur de puissance lorsque $v(t)$ est alternatif sinusoïdal et $i(t)$ périodique de même période.

Et par définition, le **facteur de puissance** s'exprime par : $k = \frac{P}{S}$. C'est un critère de qualité d'une transmission de puissance électrique ⁽⁶⁾

On en déduit :

$$\Leftrightarrow k = \frac{V_{eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1)}{V_{eff} \cdot \sqrt{(I_{moy})^2 + (I_{1eff})^2 + (I_{2eff})^2 + \dots + (I_{neff})^2 + \dots}} = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{\frac{(I_{moy})^2}{(I_{1eff})^2} + 1 + \frac{\sum_{i=2}^{\infty} (I_{ieff})^2}{(I_{1eff})^2}}}$$

$\cos(\varphi_1)$ est appelé "**facteur de déplacement**".

$$THD_f = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} (I_{ieff})^2}{I_{1eff}^2}}$$

est le « **taux de distorsion harmonique** par rapport au fondamental ».

$$\Leftrightarrow k = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{\frac{(I_{moy})^2}{(I_{1eff})^2} + 1 + THD_f^2}}$$

On en déduit que **lorsque la tension est alternative sinusoïdale**, le facteur de puissance est d'autant plus faible que la valeur moyenne et les harmoniques de rang ≥ 2 sont importants et que le déphasage φ_1 entre la tension et l'harmonique fondamental du courant est élevé.

Si $i(t)$ est alternatif et si THD_f est faible: $\cos(\varphi_1) \approx k$

Notations : Dans les appareils de mesure, le facteur de puissance est souvent noté « **PF** » (pour « power factor ») ; le facteur de déplacement est noté « **cos(φ)** » ou « **DPF** » (pour « Displacement power factor ») et le taux de distorsion harmonique est noté « **THD** » (pour « Total Harmonic Distorsion »)

Si on se place dans le cas particulier (très fréquent) où $I_{moy} = 0$:

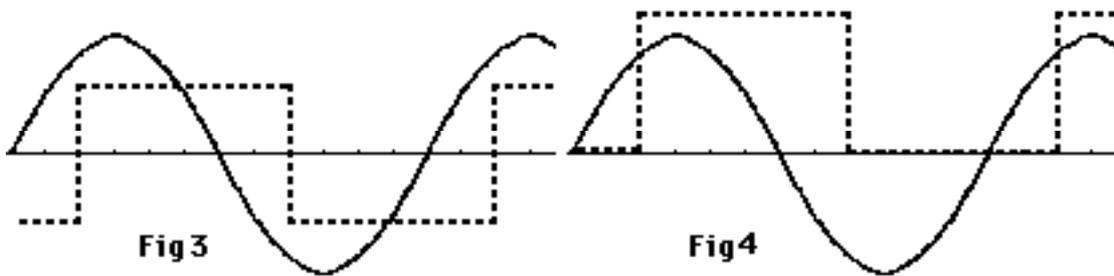
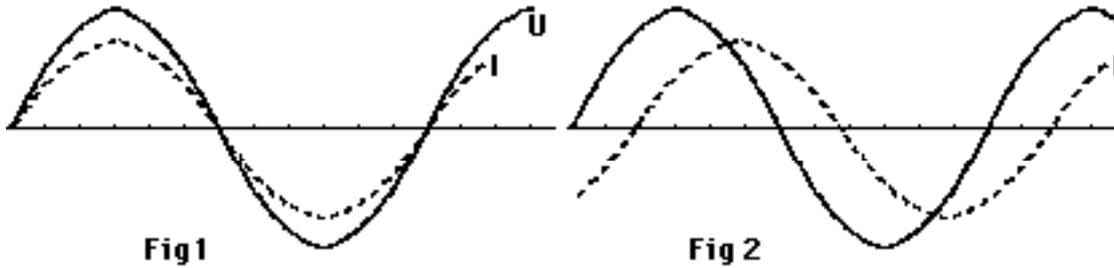
$$PF = \frac{DPF}{\sqrt{1 + THD_f^2}}$$

⁽⁶⁾ Voir le chapitre 10 de « baselecpro » :

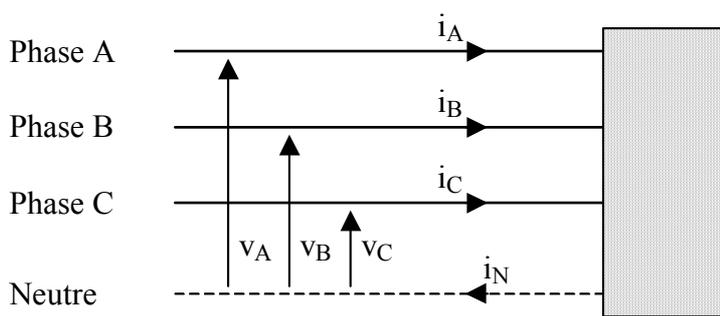
(Rechercher *Baselecpro* sur Internet avec un moteur de recherche)

Exemples :

Classer les exemples suivants par ordre de facteur de puissance décroissant. (Par hypothèse le fondamental du courant de la figure 3 est égal au courant de la figure 2) ([Réponse 3:](#))



6 SERIES DE FOURIER ET TRIPHASE EQUILIBRE



Dans une ligne triphasée en régime périodique de période T , les courants sont équilibrés (7) s'ils sont identiques à un décalage près de $\pm \frac{T}{3}$.

Si le sens est « direct » :

$$i_B(t) = i_A\left(t - \frac{T}{3}\right) \text{ et } i_C(t) = i_A\left(t + \frac{T}{3}\right).$$

➤ Si $i_A(t) = \bar{I} + \hat{I}_1 \cdot \cos[\omega t + \beta_1] + \hat{I}_2 \cdot \cos[2\omega t + \beta_2] + \hat{I}_3 \cdot \cos[3\omega t + \beta_3] + \dots$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow i_B(t) = \bar{I} + \hat{I}_1 \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{T}{3}\right) + \beta_1\right] + \hat{I}_2 \cdot \cos\left[2\omega \cdot \left(t - \frac{T}{3}\right) + \beta_2\right] + \hat{I}_3 \cdot \cos\left[3\omega \cdot \left(t - \frac{T}{3}\right) + \beta_3\right] + \dots$$

et

$$\Rightarrow i_C(t) = \bar{I} + \hat{I}_1 \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t + \frac{T}{3}\right) + \beta_1\right] + \hat{I}_2 \cdot \cos\left[2\omega \cdot \left(t + \frac{T}{3}\right) + \beta_2\right] + \hat{I}_3 \cdot \cos\left[3\omega \cdot \left(t + \frac{T}{3}\right) + \beta_3\right] + \dots$$

➤ Si $i_A(t) = \bar{I} + \hat{I}_1 \cdot \cos[\omega t + \beta_1] + \hat{I}_2 \cdot \cos[2\omega t + \beta_2] + \hat{I}_3 \cdot \cos[3\omega t + \beta_3] + \dots$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow i_B(t) = \bar{I} + \hat{I}_1 \cdot \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{3} + \beta_1\right] + \hat{I}_2 \cdot \cos\left[2\omega t - \frac{4\pi}{3} + \beta_2\right] + \hat{I}_3 \cdot \cos\left[3\omega t - \frac{6\pi}{3} + \beta_3\right] + \dots$$

et

$$\Rightarrow i_C(t) = \bar{I} + \hat{I}_1 \cdot \cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{3} + \beta_1\right] + \hat{I}_2 \cdot \cos\left[2\omega t + \frac{4\pi}{3} + \beta_2\right] + \hat{I}_3 \cdot \cos\left[3\omega t + \frac{6\pi}{3} + \beta_3\right] + \dots$$

➤ On peut maintenant calculer le courant dans le neutre $i_N(t) = i_A(t) + i_B(t) + i_C(t)$

On remarque que :

$\hat{I}_1 \cdot \cos[\omega t + \beta_1] + \hat{I}_1 \cdot \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{3} + \beta_1\right] + \hat{I}_1 \cdot \cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{3} + \beta_1\right]$ est la somme de trois fonctions alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées. Cette somme est donc nulle.

(7) mais pas forcément alternatifs sinusoïdaux équilibrés...

De même :

$$\hat{I}_2 \cdot \cos[2.\omega.t + \beta_2] + \hat{I}_2 \cdot \cos\left[2.\omega.t - \frac{4\pi}{3} + \beta_2\right] + \hat{I}_2 \cdot \cos\left[2.\omega.t + \frac{4\pi}{3} + \beta_2\right] = 0.$$

Par contre :

$$\hat{I}_3 \cdot \cos[3.\omega.t + \beta_3] + \hat{I}_3 \cdot \cos\left[3.\omega.t - \frac{6\pi}{3} + \beta_3\right] + \hat{I}_3 \cdot \cos\left[3.\omega.t + \frac{6\pi}{3} + \beta_3\right] = 3.\hat{I}_3 \cdot \cos[3.\omega.t + \beta_3]$$

On peut poursuivre la même démarche pour les harmoniques suivants...

On en conclut :

$$i_N(t) = 3.\bar{I} + 3.\hat{I}_3 \cdot \cos[3.\omega.t + \beta_3] + 3.\hat{I}_6 \cdot \cos[6.\omega.t + \beta_6] + 3.\hat{I}_9 \cdot \cos[9.\omega.t + \beta_9] + \dots$$

- La somme de courants triphasés équilibrés ne comporte que la valeur moyenne et des harmoniques 3 et multiples de 3.

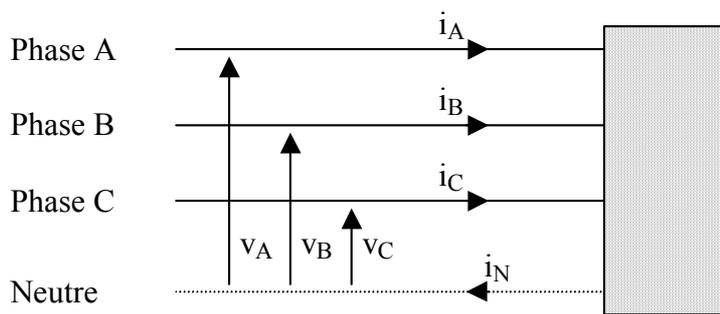
(Le courant $i_N(t)$ ne comporte que la valeur moyenne et des harmoniques 3 et multiples de 3).

- **S'il n'y a pas de neutre :**

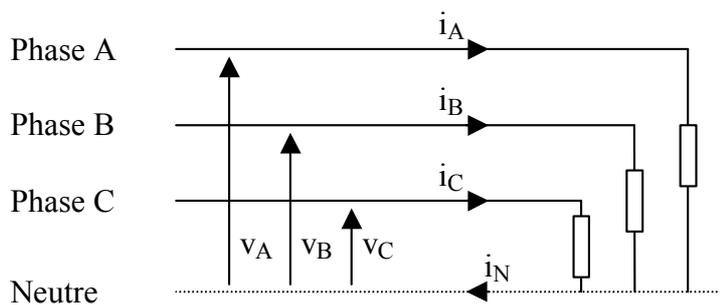
$$\bar{I} = 0, \hat{I}_3 = 0, \hat{I}_6 = 0, \hat{I}_9 = 0, \dots$$

Les courants triphasés équilibrés d'une ligne sans neutre ont une valeur moyenne nulle et ne comportent pas d'harmoniques 3 et multiples de 3.

7 PUISSANCE EN TRIPHASÉ ÉQUILIBRÉ



La ligne triphasée ci-contre est soumise à des tensions $v_A(t)$, $v_B(t)$ et $v_C(t)$, et elle est parcourue par des courants $i_A(t)$, $i_B(t)$, $i_C(t)$ et $i_N(t)$ qu'elle délivre à une charge quelconque.



Il est toujours possible de simuler le comportement de cette charge par trois dipôles montés en étoile qui, pour les mêmes tensions, engendreront les mêmes courants.

La loi de conservation de l'énergie précise que la puissance active totale consommée par la charge est la somme des puissances actives consommées par chaque élément.

➤ **Lorsque les signaux sont tous de même période T ,**
La puissance active (ou puissance moyenne) s'exprime par la relation :

$$P = (v_A(t) \cdot i_A(t))_{\text{moy}} + (v_B(t) \cdot i_B(t))_{\text{moy}} + (v_C(t) \cdot i_C(t))_{\text{moy}}$$

➤ **Si les tensions et les courants sont triphasés équilibrés :**

$$P = 3 \cdot (v_A(t) \cdot i_A(t))_{\text{moy}} = 3 \cdot (v_B(t) \cdot i_B(t))_{\text{moy}} = 3 \cdot (v_C(t) \cdot i_C(t))_{\text{moy}}$$

et $V_{A\text{eff}} = V_{B\text{eff}} = V_{C\text{eff}} = V_{\text{eff}}$ et de même $I_{A\text{eff}} = I_{B\text{eff}} = I_{C\text{eff}} = I_{\text{eff}}$

Le **facteur de puissance** s'exprime par :

$$k = \frac{P}{S} = \frac{P}{3 \cdot V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}}$$

➤ **Si les tensions sont triphasées alternatives sinusoïdales équilibrées et les courants triphasés équilibrés de même période que les tensions (mais pas sinusoïdaux) :**

$$P = 3 \cdot (v_A(t) \cdot i_A(t))_{\text{moy}} = 3 \cdot V_{\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_1)$$

➤ Le **facteur de puissance** est alors :

$$\Leftrightarrow k = \frac{3.V_{eff}.I_{1eff}.\cos(\varphi_1)}{3.V_{eff}.\sqrt{(I_{moy})^2 + (I_{1eff})^2 + (I_{2eff})^2 + \dots + (I_{neff})^2 + \dots}} = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{\frac{(I_{moy})^2}{(I_{1eff})^2} + 1 + \frac{\sum_{i=2}^{\infty} (I_{ieff})^2}{(I_{1eff})^2}}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{\frac{(I_{moy})^2}{(I_{1eff})^2} + 1 + THD_f^2}}$$

$\cos(\varphi_1)$ est appelé "**facteur de déplacement**". (DPF)

$$THD_f = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} (I_{ieff})^2}{I_{1eff}^2}} \quad \text{est le « **taux de distorsion harmonique** par rapport au fondamental».$$

Notations : Dans les appareils de mesure, le facteur de puissance est souvent noté « **PF** » (pour « power factor ») ; le facteur de déplacement est noté « **cos(φ)** » ou « **DPF** » (pour « Displacement power factor ») et le taux de distorsion harmonique est noté « **THD** » (pour « Total Harmonic Distorsion »)

Donc, comme en monophasé : **Si on se place dans le cas particulier (très fréquent) où $I_{moy} = 0$** :

$$PF = \frac{DPF}{\sqrt{1 + THD^2}}$$

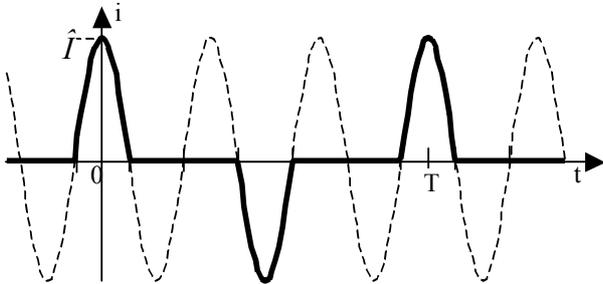
8 CE QUE J'AI RETENU DE CE CHAPITRE.

La réponse aux questions suivantes permet de vérifier si les connaissances principales sont acquises.

- a) Quelle est la propriété remarquable de la série de Fourier d'une fonction paire ?
- b) Quelle est la propriété remarquable de la série de Fourier d'une fonction dont la composante alternative est impaire ?
- c) Qu'est-ce qu'une « symétrie de glissement » pour un signal périodique ? Quelle est la propriété remarquable de la série de Fourier d'une fonction dont la composante alternative présente une symétrie de glissement ?
- d) Comment peut-on estimer graphiquement le fondamental d'une série de Fourier ?
- e) Quelle est la relation qui lie la valeur efficace d'un signal et sa série de Fourier ?
- f) Donner l'expression de la puissance active dans un dipôle en régime périodique, à partir des séries de Fourier de la tension à ses bornes et du courant qui le traverse. Définir clairement les termes employés.
- g) Comment se simplifie l'expression précédente si la tension est alternative sinusoïdale de même fréquence que le fondamental du courant ?
- h) Exprimer le facteur de puissance d'une ligne monophasée en fonction de la puissance active et de la puissance apparente.
- i) Exprimer le facteur de puissance d'une ligne monophasée soumise à une tension alternative sinusoïdale et parcourue par un courant périodique de même période que la tension. (Utiliser le terme « facteur de déplacement »)
- j) Exprimer la relation entre « DPF », « THD » et « PF » pour une ligne monophasée soumise à une tension alternative sinusoïdale et parcourue par un courant alternatif périodique de même période que la tension.
- k) Une ligne triphasée (avec neutre) est parcourue par des courants périodiques triphasés équilibrés (mais pas forcément alternatifs sinusoïdaux). Que peut-on dire de la série de Fourier du courant dans le neutre par rapport à la série de Fourier des courants dans les phases ?
- l) Une ligne triphasée (sans neutre) est parcourue par des courants périodiques triphasés équilibrés (mais pas forcément alternatifs sinusoïdaux). Que peut-on dire de la série de Fourier de ces courants ?
- m) Comment s'exprime la puissance active dans une ligne triphasée (*pas nécessairement équilibrée avec des tensions et des courants pas nécessairement sinusoïdaux*) dont tous les courants et toutes les tensions sont de même période ?
- n) Comment s'exprime la puissance active dans une ligne triphasée dont les courants et les tensions, de même période, sont équilibrés (mais pas sinusoïdaux) ? Comment s'exprime alors le facteur de puissance ?

9 PROBLEMES

Chap 6. Exercice 1 : Harmoniques basse fréquence sur le réseau 50 Hz



Le courant périodique $i(t)$ (de période T) absorbé par un variateur de vitesse industriel est représenté ci-contre (en traits forts).

1) La fonction $i(t)$ a une valeur moyenne nulle, et elle présente deux autres particularités qui permettent de calculer plus facilement sa série de Fourier. (Il n'est pas demandé de calculer cette série de Fourier).

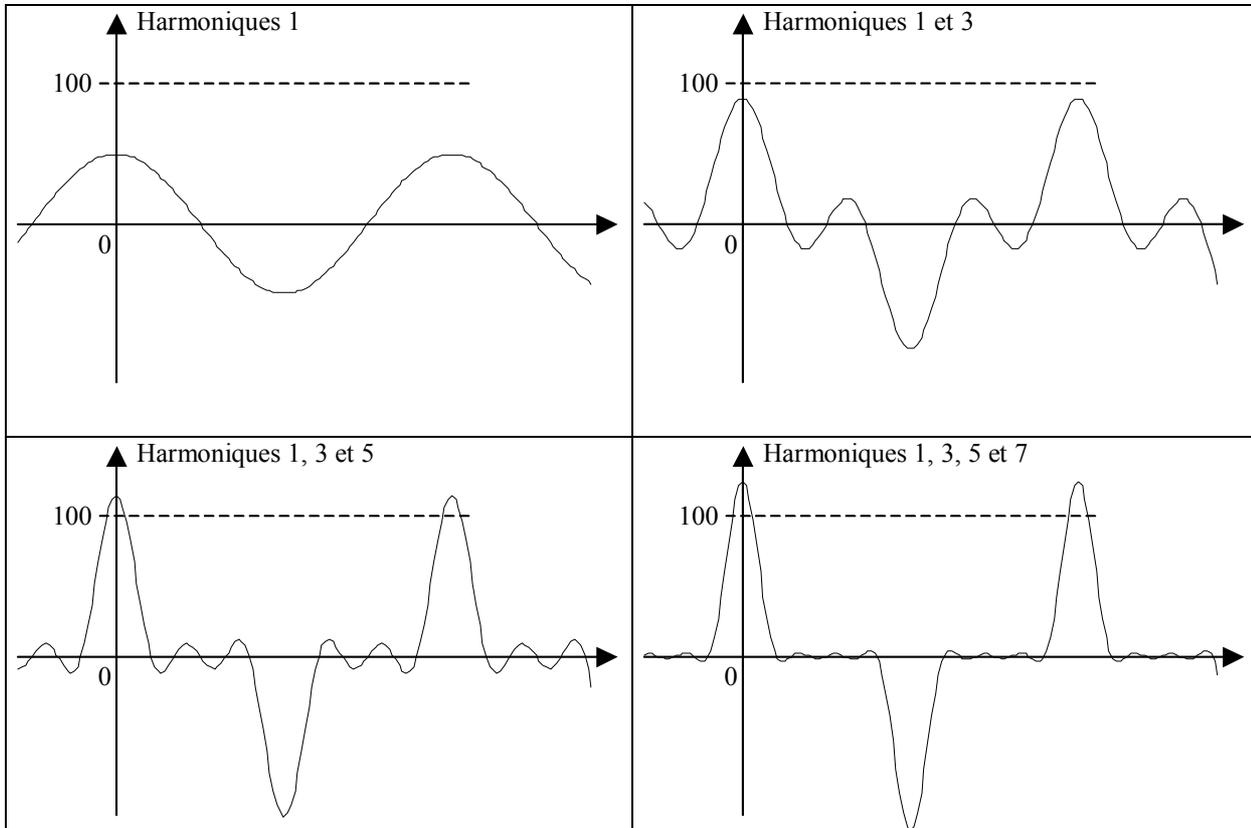
Indiquer ces deux particularités et les simplifications qui en découlent.

2) Représenter sur le graphe de $i(t)$ une estimation de son fondamental (Il n'est pas demandé une très grande précision pour ce qui concerne son amplitude).

3) Sachant que $\hat{I} = 120 \text{ A}$, le courant $i(t)$ peut être approché par l'expression suivante:

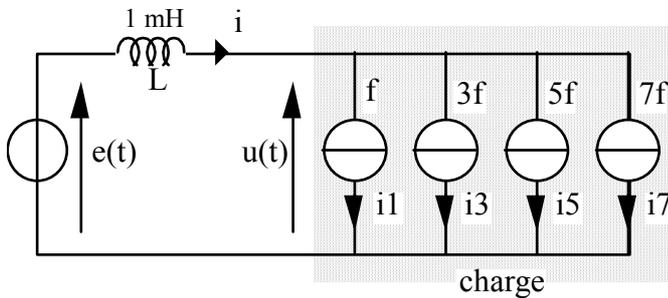
$$i(t) \approx 50.\cos(100\pi t) + 40.\cos(300\pi t) + 24,8.\cos(500\pi t) + 9,9.\cos(700\pi t)$$

Les graphes ci-dessous représentent la reconstitution progressive du courant $i(t)$ à partir de ses harmoniques, jusqu'à l'ordre 7.



3.1) Calculer approximativement la valeur efficace de $i(t)$ à partir des premiers termes de sa série de Fourier. Vérifier ce résultat en comparant la valeur efficace de $i(t)$ (en gras ci-dessus) avec la valeur efficace de la fonction alternative sinusoïdale (en pointillé ci-dessus).

3.2) Le courant $i(t)$ est prélevé sur une ligne monophasée alimentée en 220V/50Hz. La ligne présente une impédance que nous assimilerons à une inductance de 1 mH. Le variateur de vitesse, vu de son entrée, est équivalent à des générateurs de courant absorbant le même courant i (voir ci-dessous)



$$e(t) = 220.\sqrt{2}.\cos(100\pi t + 0,25)$$

$$i_1(t) = 50.\cos(100\pi t)$$

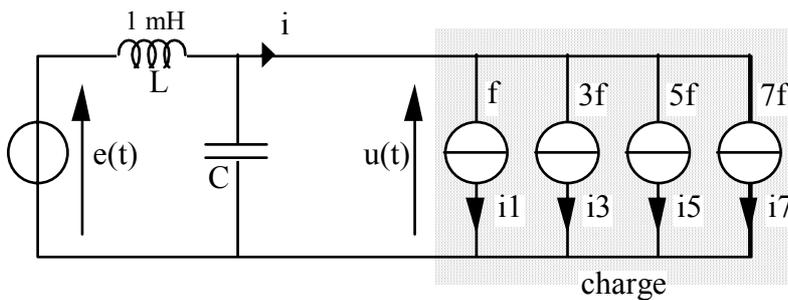
$$i_3(t) = 40.\cos(300\pi t)$$

$$i_5(t) = 24,8.\cos(500\pi t)$$

$$i_7(t) = 9,9.\cos(700\pi t)$$

Calculer la série de Fourier de $u(t)$ jusqu'à l'ordre 3 (pour simplifier le calcul, les ordres 5 et 7 ne sont pas demandés).

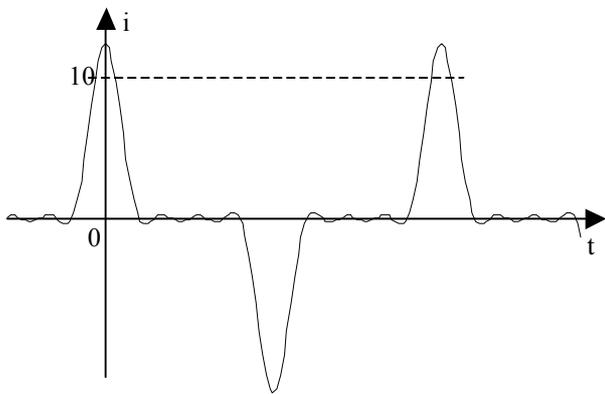
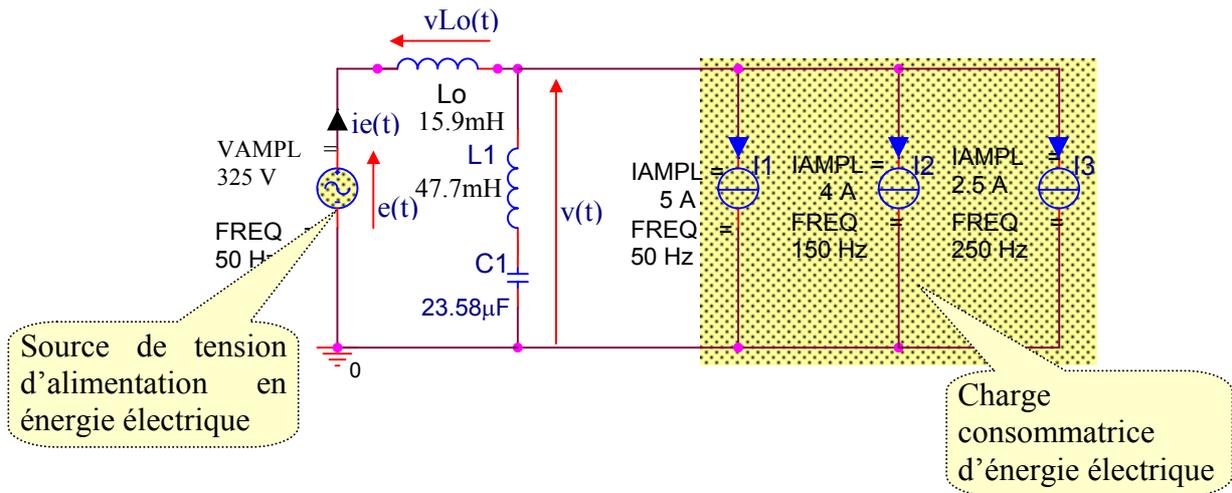
3.3) Pour relever le facteur de puissance d'une installation précédente, un condensateur C de 400 μ F avait été placé (et demeure encore) sur la ligne. (**Le courant $i(t)$ consommé par la charge que constitue le variateur de vitesse demeure le même que précédemment**)



Pour déterminer $u(t)$, on a calculé ses premiers harmoniques en appliquant le théorème de superposition au schéma électrique ci-dessus. Les résultats des calculs sont donnés ci-dessous, sauf une case que l'on complètera.

fréquence	50 Hz	150 Hz	250 Hz	350 Hz
$\left(jC.n.\omega + \frac{1}{jL.n.\omega} \right)^{-1}$	0,327j	1,467j	120,5j	- 2,35j
Harmoniques de $u(t)$	$324.\cos(100\pi t + 0,25)$ + $16,35.\cos(100\pi t - \frac{\pi}{2})$	$58,5.\cos(300\pi t - \frac{\pi}{2})$		$+ 23,3.\cos(700\pi t + \frac{\pi}{2})$

Chap 6. Exercice 2 : Echange d'énergie électrique et filtrage.



Une source de tension $e(t) = 230.\sqrt{2}.\cos(100.\pi.t)$ alimente une charge qui consomme un courant périodique impulsionnel comme le montre le graphe ci-contre.

La liaison entre la source de tension et la charge se fait au moyen d'une ligne inductive (modélisée par l'inductance L_o sur le schéma ci-dessus.)

On admettra que ce courant peut être reconstitué par la série de Fourier :

$$i(t) = 5.\cos(100.\pi.t) + 4.\cos(300.\pi.t) + 2,5.\cos(500.\pi.t) + 1.\cos(700.\pi.t)$$

Ce courant non sinusoïdal est source de perturbations dans la ligne d'alimentation en énergie électrique. Il engendre également des perturbations de la tension d'alimentation de la charge.

Pour réduire ces perturbations, on équipe le montage d'un « filtre » ($L_1.C_1$)

De façon à simplifier l'étude, on négligera le terme $1.\cos(700.\pi.t)$ par rapport aux autres termes de la somme ci-dessus.

a) Afin de déterminer $v(t)$ et $i_e(t)$, représenter les 4 schémas illustrant la mise en œuvre du théorème de superposition.

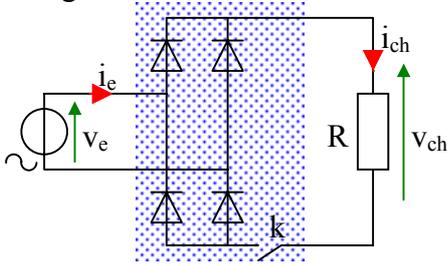
ω	$100.\pi$	$300.\pi$	$500.\pi$
$L_o.\omega$	5Ω	15Ω	25Ω
$L_1.\omega$	15Ω	45Ω	75Ω
$1/C_1.\omega$	135Ω	45Ω	27Ω

b) Connaissant les valeurs ci-contre, déterminer les expressions numériques de $i_e(t)$ et $v(t)$.

Chap 6. Exercice 3 : Redresseur à modulation de largeur d'impulsion

A - CHARGE RESISTIVE ET MODULATION A RAPPORT CYCLIQUE CONSTANT

Le convertisseur suivant met en relation une source de tension alternative sinusoïdale 50 Hz et une charge non réversible en courant ayant un comportement équivalent à une résistance ohmique.

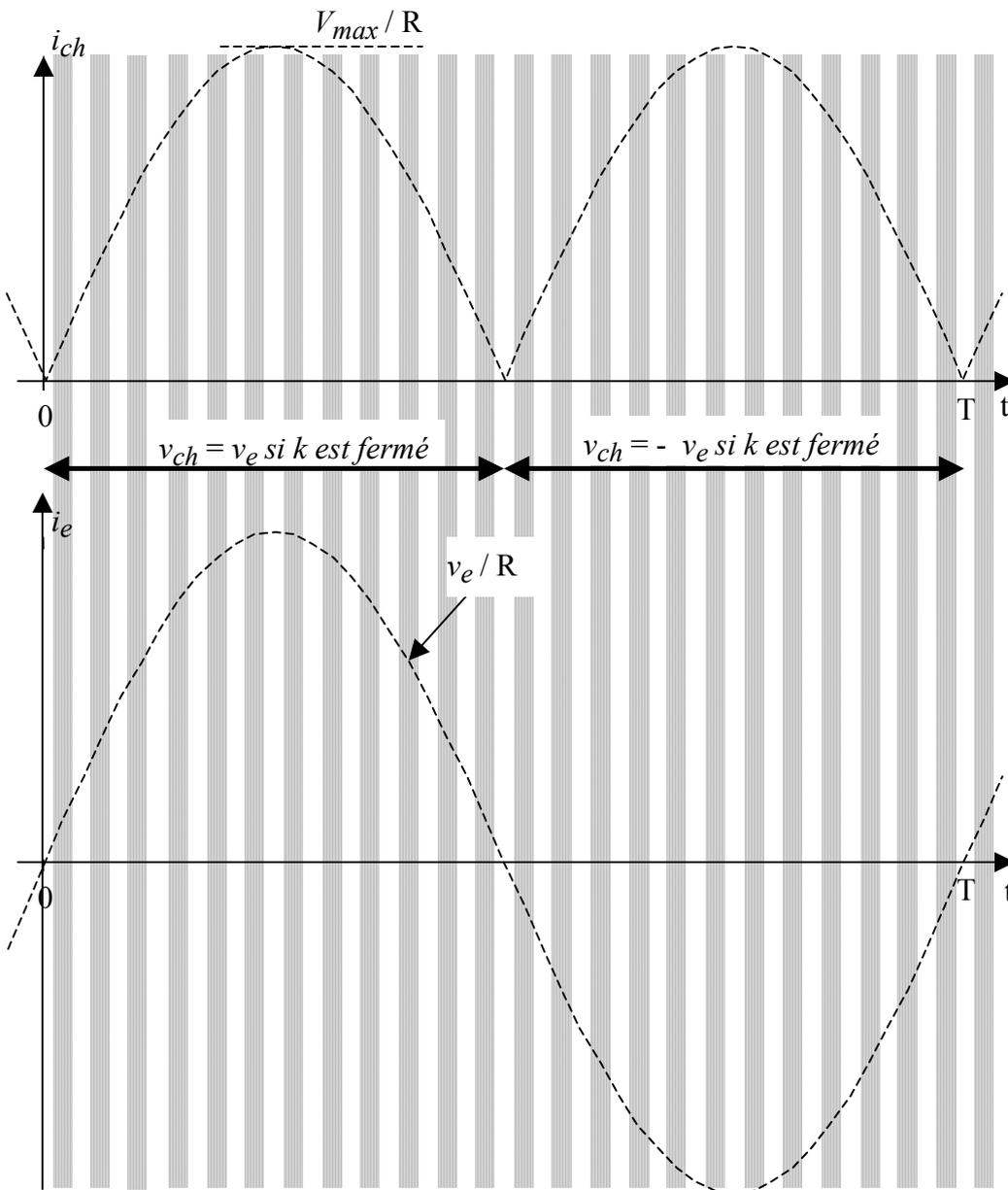


$$v_e(t) = V_{max} \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

L'interrupteur k a un fonctionnement périodique de fréquence 25 kHz.

Son rapport cyclique $\left(\frac{\text{temps de fermeture}}{\text{période}} \right)$ est noté « α »

a) Les 4 diodes et l'interrupteur « k » sont considérés idéaux : ils ne consomment et n'accumulent aucune énergie (Le convertisseur est donc « à liaison directe »).



Exprimer la relation entre la puissance instantanée $v_e(t) \cdot i_e(t)$ reçue par ce convertisseur et la puissance instantanée $v_{ch}(t) \cdot i_{ch}(t)$ fournie par le convertisseur à la résistance « R ».

b) Sur les graphes ci-contre, les zones grises verticales marquent les intervalles de fermeture de l'interrupteur « k ». (Pour simplifier la construction graphique, on a limité la fréquence de « k » à 24×50 Hz, alors qu'en réalité, elle est de 25 kHz.)

Afin de représenter ci-contre l'allure de $i_{ch}(t)$ et de $i_e(t)$ pour un rapport cyclique « α » d'environ $\frac{1}{2}$, colorier simplement l'aire sous ces courbes.

Pour ce faire, on procédera à l'aide d'un surligneur en s'aidant des zones grisées.

(On appliquera le principe de la conservation de la puissance électrique instantanée)

c) On remarque que le courant $i_e(t)$ est le produit d'une sinusoïde par un signal carré d'amplitude 1.

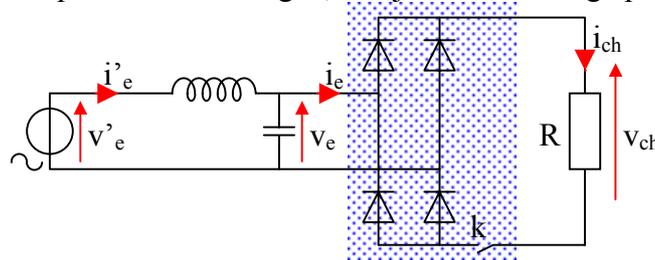
Ce signal carré peut s'exprimer par la série de Fourier $a + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin(i.a.\pi)}{i.\pi} \cdot \cos(i.\omega' t + \beta_i)$.

La fréquence de découpage de « k » étant de 25 kHz, en déduire l'amplitude et la fréquence des 5 premiers harmoniques non-nuls de $i_e(t)$ en fonction de V_{max} , « R » et « a ».

En déduire la puissance active « P », le facteur de déplacement « DPF » ⁽⁸⁾, la valeur efficace du courant « $I_{e\text{eff}}$ » ⁽⁹⁾, le taux de distorsion harmonique « THD » et le facteur de puissance « PF » de la ligne qui alimente ce convertisseur en fonction de V_{max} , « R » et « a ».

B - MISE EN ŒUVRE D'UN FILTRE SUR LA LIGNE D'ALIMENTATION

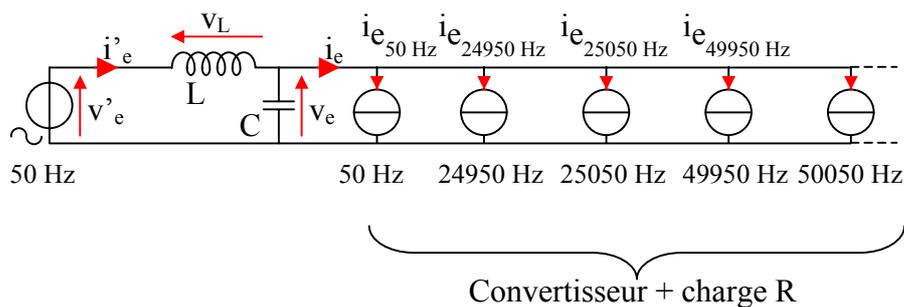
Pour améliorer le facteur de puissance de la ligne, on ajoute au montage précédent un filtre « LC » :



a) Pourquoi souhaite-t-on améliorer le facteur de puissance de la ligne ?

b) Le convertisseur et sa charge consomment un courant $i_e(t)$ périodique (en régime permanent) qui peut être exprimé par une série de Fourier.

Vis à vis du filtre LC, l'ensemble constitué par le convertisseur et sa charge est équivalent à n sources de courant en parallèle (une pour chaque harmonique) :



Les valeurs de L et C sont telles que la fréquence propre du filtre est de 500 Hz et que $L.100.\pi \ll R$

⁽⁸⁾ A partir de l'observation du graphe de $i_e(t)$.

⁽⁹⁾ L'utilisation de la conservation de la puissance active permet d'obtenir une expression plus simple que l'utilisation de la formule de Parseval :

$$F_{eff} = \sqrt{(F_{moy})^2 + (F_{1eff})^2 + (F_{2eff})^2 + \dots + (F_{neff})^2 + \dots}$$

Etablir le schéma équivalent permettant le calcul de l'harmonique fondamental (à 50 Hz) de v_e et i'_e .

c) Exprimer la valeur complexe de l'harmonique fondamental (à 50 Hz) $\underline{V}_{e50\text{ Hz}}$ en fonction de \underline{V}'_e et de $\underline{I}_{e50\text{ Hz}}$. Vérifier que l'harmonique fondamental $v_{e50\text{ Hz}}(t) \approx v'_e(t)$ quelque soit la valeur du rapport cyclique « a » de l'interrupteur « k ».

d) Montrer qualitativement que $v_e(t) \approx v'_e(t)$ (en prenant en compte tous les harmoniques du courant).

Et montrer que dans ces conditions : $i'_e(t) \approx i_{e50\text{ Hz}}(t)$ (en considérant la composante du courant $i'_e(t)$ engendrée par la source $v_e(t)$ seule négligeable par rapport à $i_{e50\text{ Hz}}(t)$)

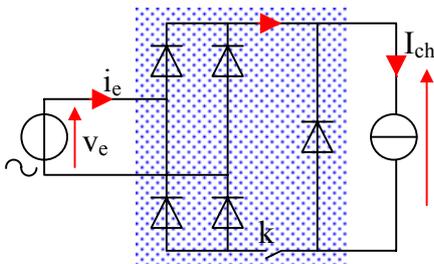
Quel est, dans ces conditions, la valeur du facteur de puissance de la source $v'_e(t)$?

e) La ligne présente en réalité une résistance interne « r ». La valeur de « r » est telle que la chute de tension dans celle-ci est négligeable par rapport à la tension $v_e(t)$. (L'étude précédente n'est donc pas remise en cause).

Que peut-on dire des pertes joule en ligne en présence du filtre par rapport aux pertes joule en ligne en l'absence du filtre ?

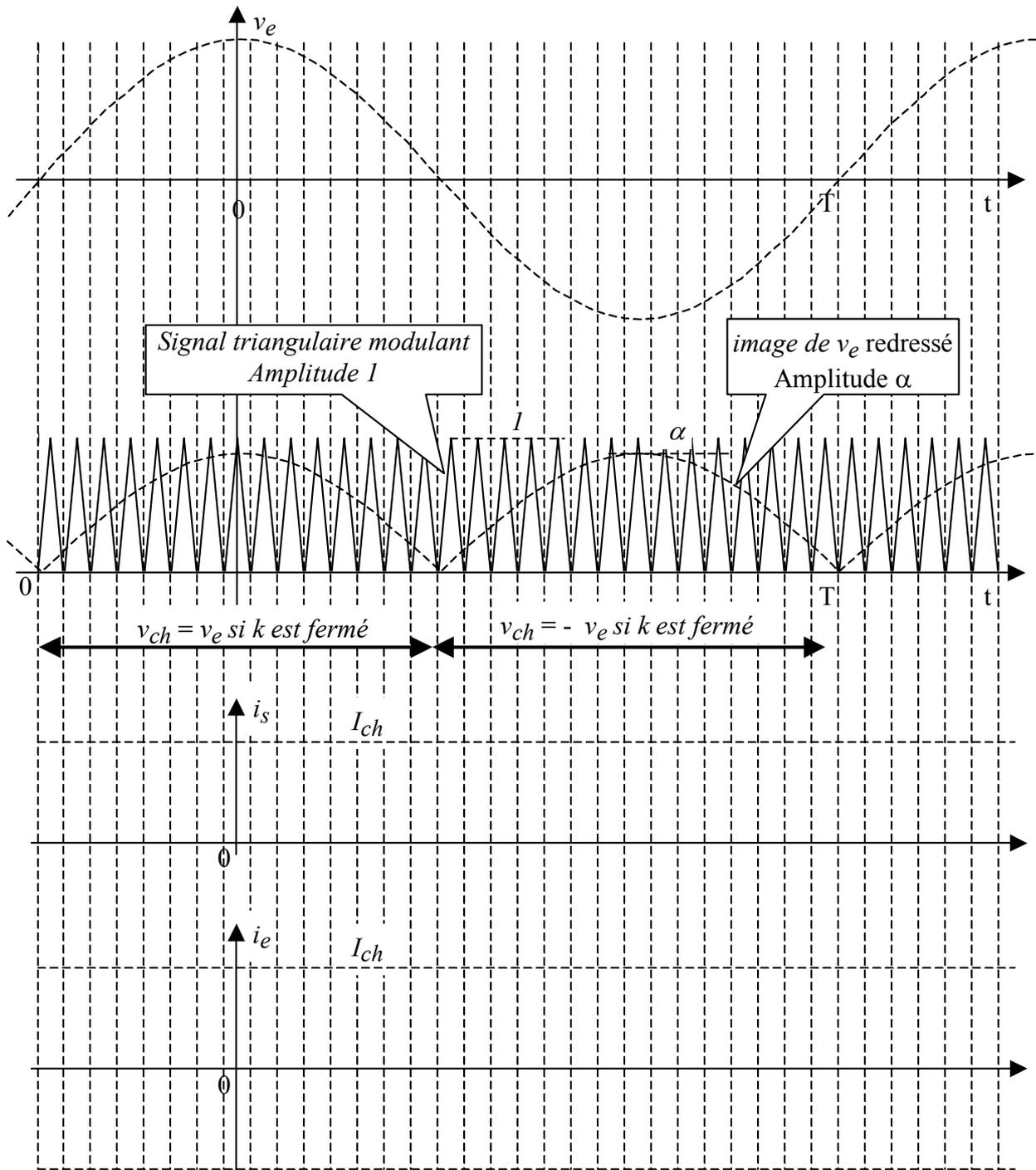
C - CHARGE TRES INDUCTIVE ET MODULATION EN SINUS

Le convertisseur suivant met en relation une source de tension alternative sinusoïdale 50 Hz et une charge inductive non réversible en courant ayant un comportement équivalent à une source de courant I_{ch} constant.



La commande de l'interrupteur k est obtenue par une « modulation sinusoïdale » : Lorsque le signal triangulaire modulant est inférieur à l'image de v_e redressé : k est fermé. Il est ouvert dans le cas contraire.

(Pour simplifier la construction graphique, on a limité ci dessous la fréquence du signal modulant à 30×50 Hz, alors qu'en réalité, elle est de 25 kHz.)



a) Représenter l'allure de $i_s(t)$.

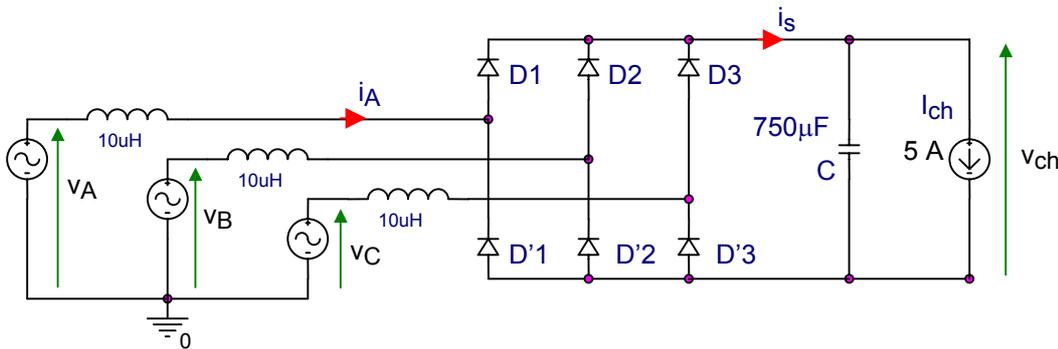
En appliquant le principe de la conservation de la puissance électrique instantanée, en déduire le graphe de $i_e(t)$.

b) $i_e(t)$ présente deux particularités qui permettent de simplifier le calcul de sa série de Fourier. Quelles sont ces deux particularités, et quelles en sont les conséquences ?

c) On peut démontrer que, outre son fondamental, $\alpha \cdot I_{\max} \cdot \cos(\omega t)$ à 50 Hz, la série de Fourier de $i_e(t)$ ne comporte pas d'harmoniques de rangs faibles.

Conclure sur l'intérêt d'ajouter au montage un filtre LC du type utilisé dans la question B.

Chap 6. Exercice 4 : Pont redresseur triphasé à diodes débitant sur une charge capacitive



Voici l'allure du courant dans une phase de la ligne triphasée équilibrée en entrée du pont de diodes:



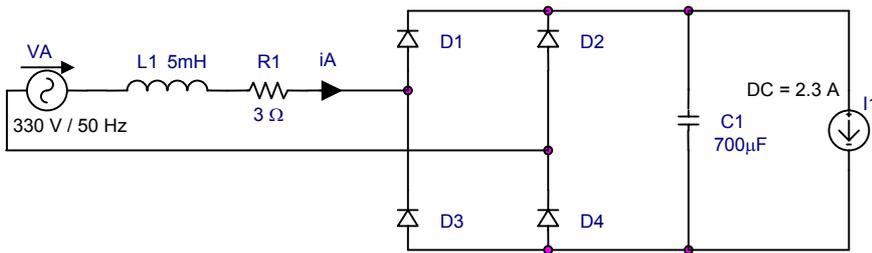
Dans la série de Fourier de $i_A(t)$, certains harmoniques sont absents, lesquels? (Justifier en quelques mots)

Chap 6. Exercice 5 : Harmoniques dans une ligne triphasée avec des charges équilibrées non linéaires

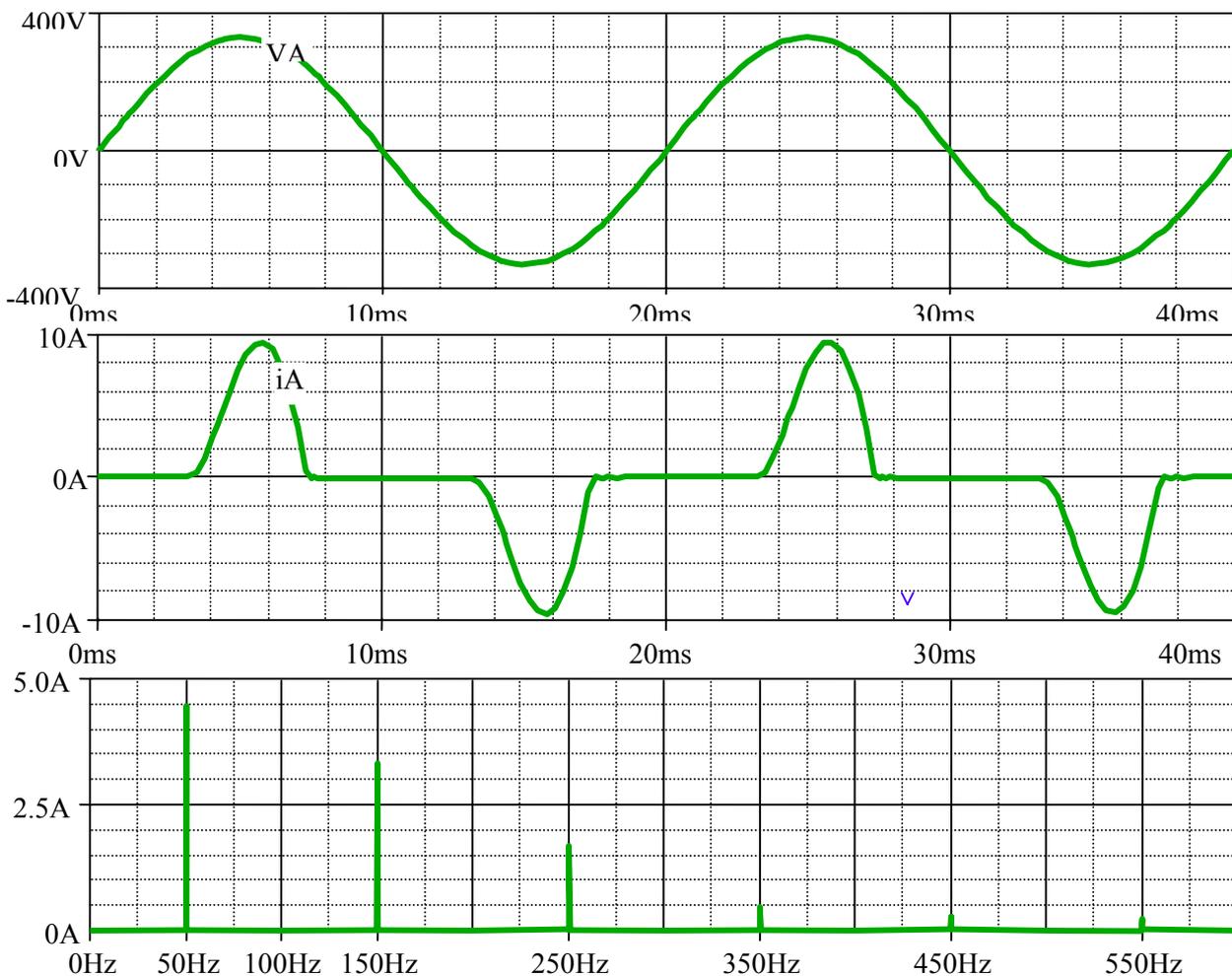
A) Une ligne monophasée alimente un variateur de vitesse absorbant un courant non sinusoïdal.

L'étage d'entrée du variateur est constitué d'un pont redresseur à diodes avec un filtrage capacitif. Pour cet étage d'entrée, le reste du convertisseur est équivalent à une source de courant continu absorbant un courant de 2,3 A.

Une source de tension alternative sinusoïdale de valeur efficace 235 V et de fréquence 50 Hz alimente le montage. La ligne d'alimentation présente une résistance interne de 3 Ω et une inductance équivalente de 5 mH:



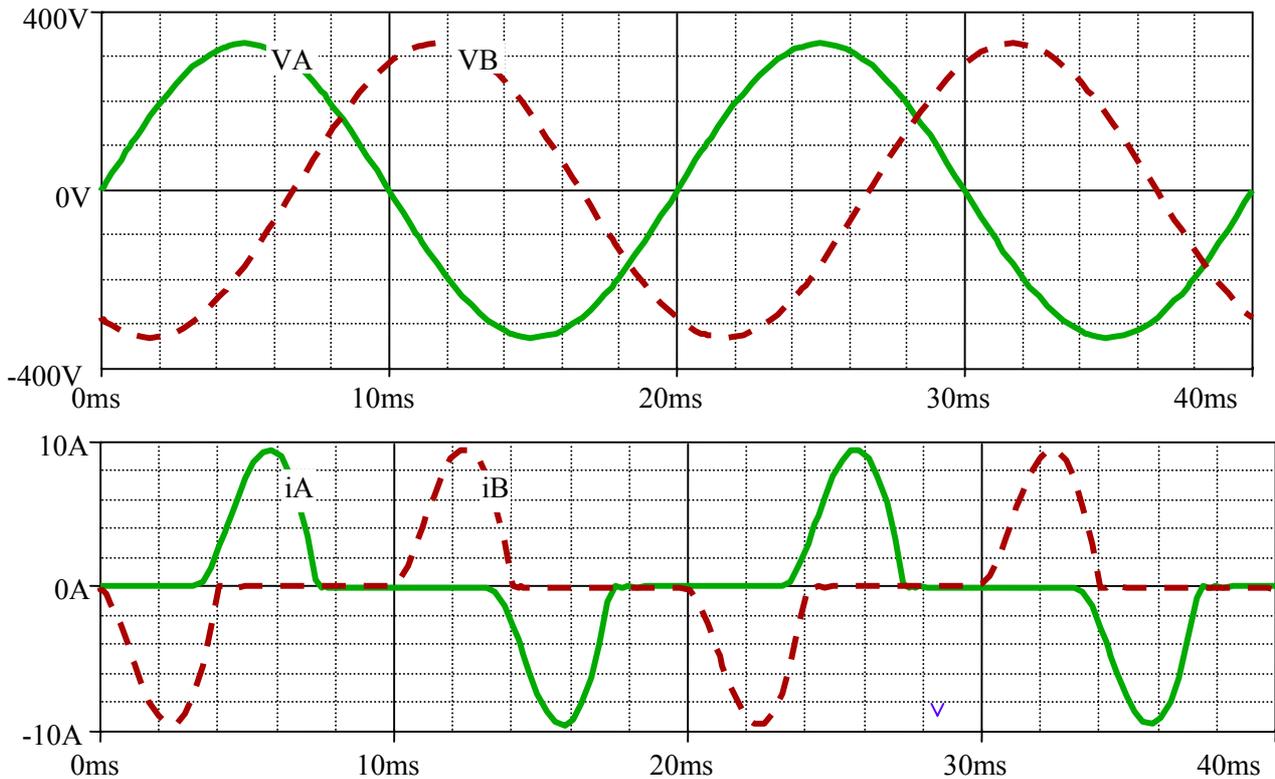
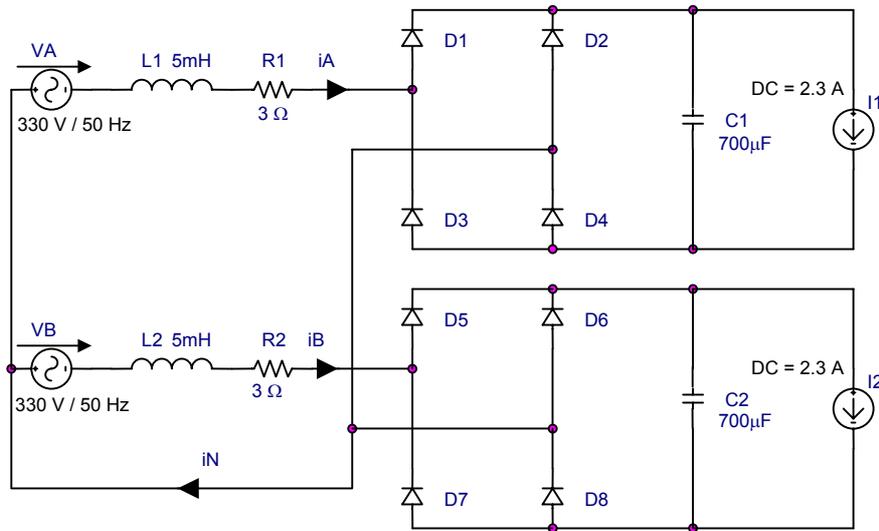
La tension $v_A(t)$ et le courant $i_A(t)$ sont représentés ci-dessous ainsi que le spectre d'amplitude de la série de Fourier de $i_A(t)$.

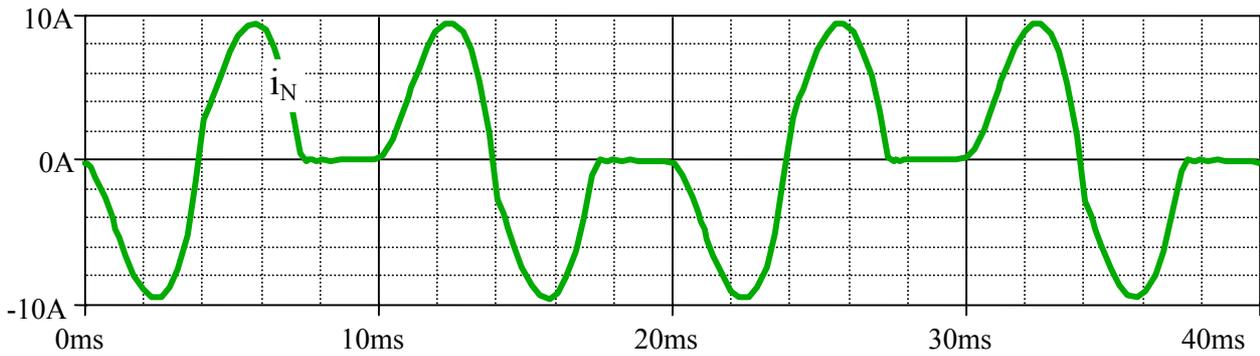


Pourquoi le courant $i_A(t)$ ne présente-t-il pas d'harmoniques aux fréquences 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz... ? Calculer la valeur efficace de $i_A(t)$ et son taux de distorsion harmonique (THD_f). Estimer le facteur de déplacement ($\cos(\varphi_1)$ ou DPF) et le facteur de puissance de la ligne (au niveau de $v_A(t)$). Calculer la puissance active fournie par la source $v_A(t)$. Vérifier ce dernier résultat à partir d'une estimation de $V_{C1_{moy}}$

Calculer les pertes joule dans la ligne d'alimentation.

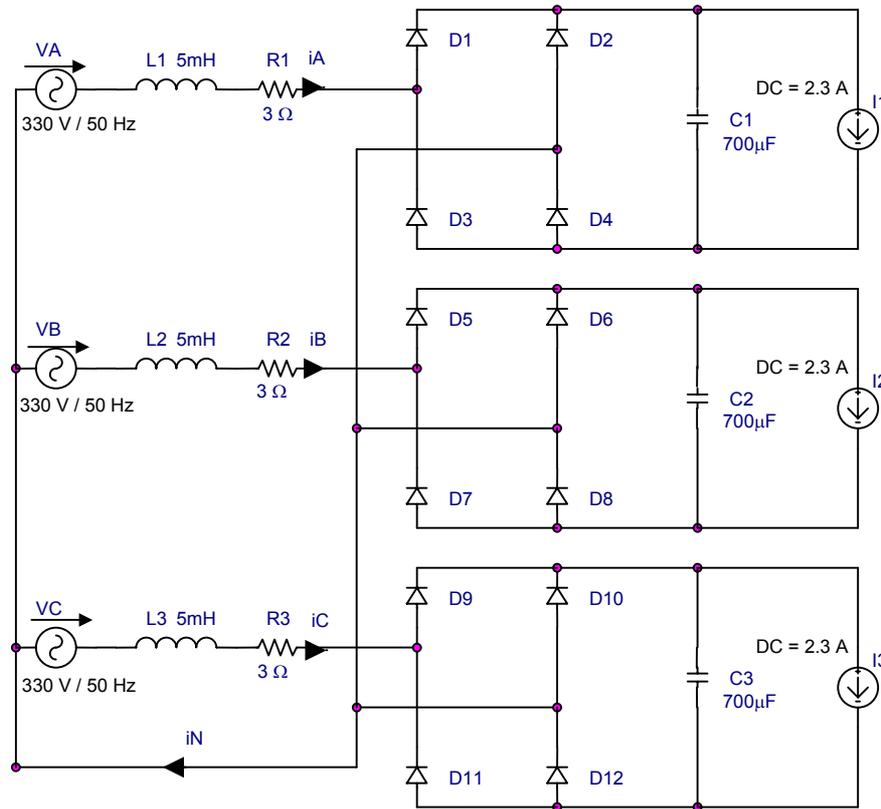
B) Sur une ligne triphasée alternative sinusoïdale équilibrée en tensions, on ajoute un second variateur de vitesse de même type (On suppose que les deux variateurs fonctionnent dans les mêmes conditions).





Sachant que $i_N(t) = i_A(t) + i_B(t)$, déterminer le spectre harmonique du courant $i_N(t)$. En déduire I_{Neff} .

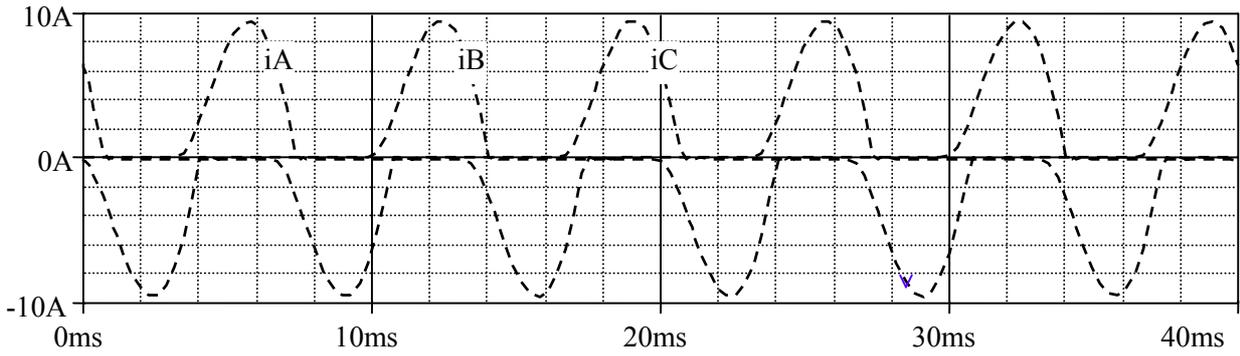
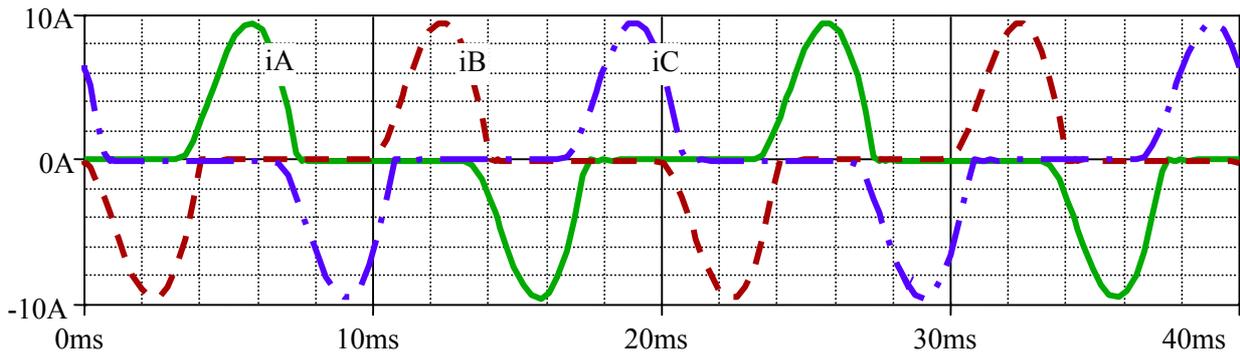
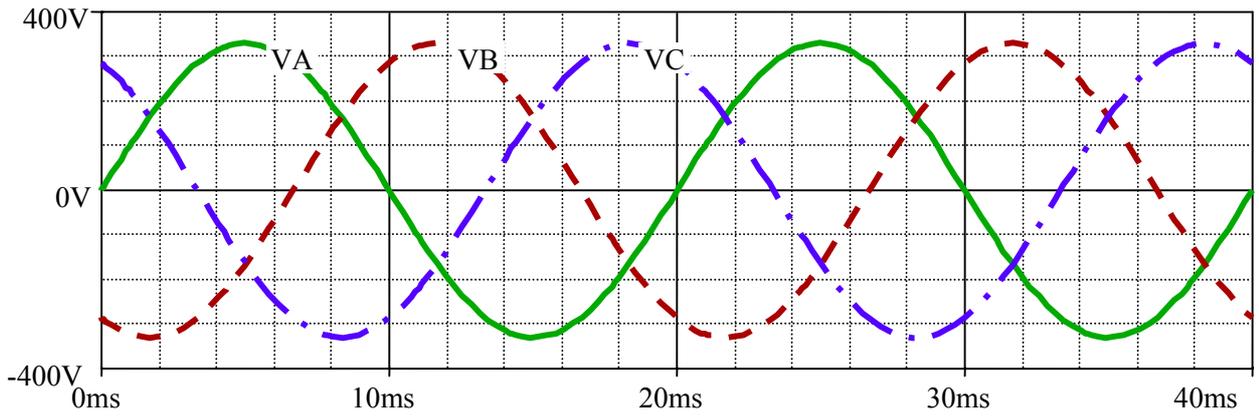
C) Sur une ligne triphasée alternative sinusoïdale équilibrée en tensions, on ajoute un troisième variateur de vitesse de même type (On suppose que les trois variateurs fonctionnent dans les mêmes conditions).



Représenter $i_N(t)$ sur le graphe ci-après.

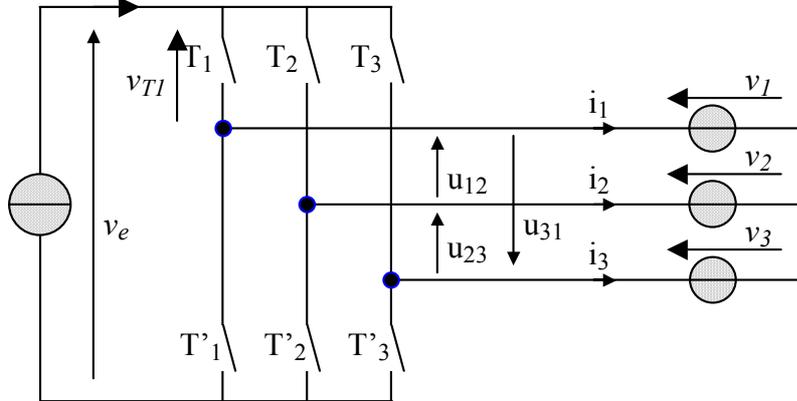
Déterminer le spectre harmonique du courant $i_N(t)$. En déduire I_{Neff} .

Déterminer le facteur de puissance de la ligne (au niveau de $v_A(t)$, $v_B(t)$ et $v_C(t)$).



Chap 6. Exercice 6 : Onduleur de courant triphasé

$i_e \approx I_o = \text{constante}$



L'onduleur de courant ci-contre est alimenté par une source de courant $i_e(t) > 0$ dont on négligera l'ondulation. ($i_e(t) \approx I_o = \text{constante}$).

Les interrupteurs électroniques sont supposés parfaits: courant nul à l'état bloqué, tension nulle à l'état passant et commutation instantanée.

L'onduleur débite dans une source de tensions alternatives sinusoïdales d'amplitude \hat{V} , triphasées équilibrées parfaites (c'est à dire sans impédance interne).

a) On donne les intervalles de conduction des interrupteurs sur la page suivante. Représenter sur cette même page, le graphe des courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$.

b) Sur le graphe de $i_1(t)$, représenter le graphe de son harmonique fondamental $i_{1f}(t)$. (sachant

que l'amplitude de ce fondamental est $\hat{I}_{1f} = \frac{2.I_o.\sqrt{3}}{\pi} = 1,1.I_o$).

Quel est le déphasage φ de $v_1(t)$ par rapport au fondamental $i_{1f}(t)$ de $i_1(t)$?

Sans faire aucun calcul, on sait que dans les séries de Fourier des courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ certains harmoniques sont nuls. Préciser le rang des harmoniques nuls en le justifiant en quelques mots.

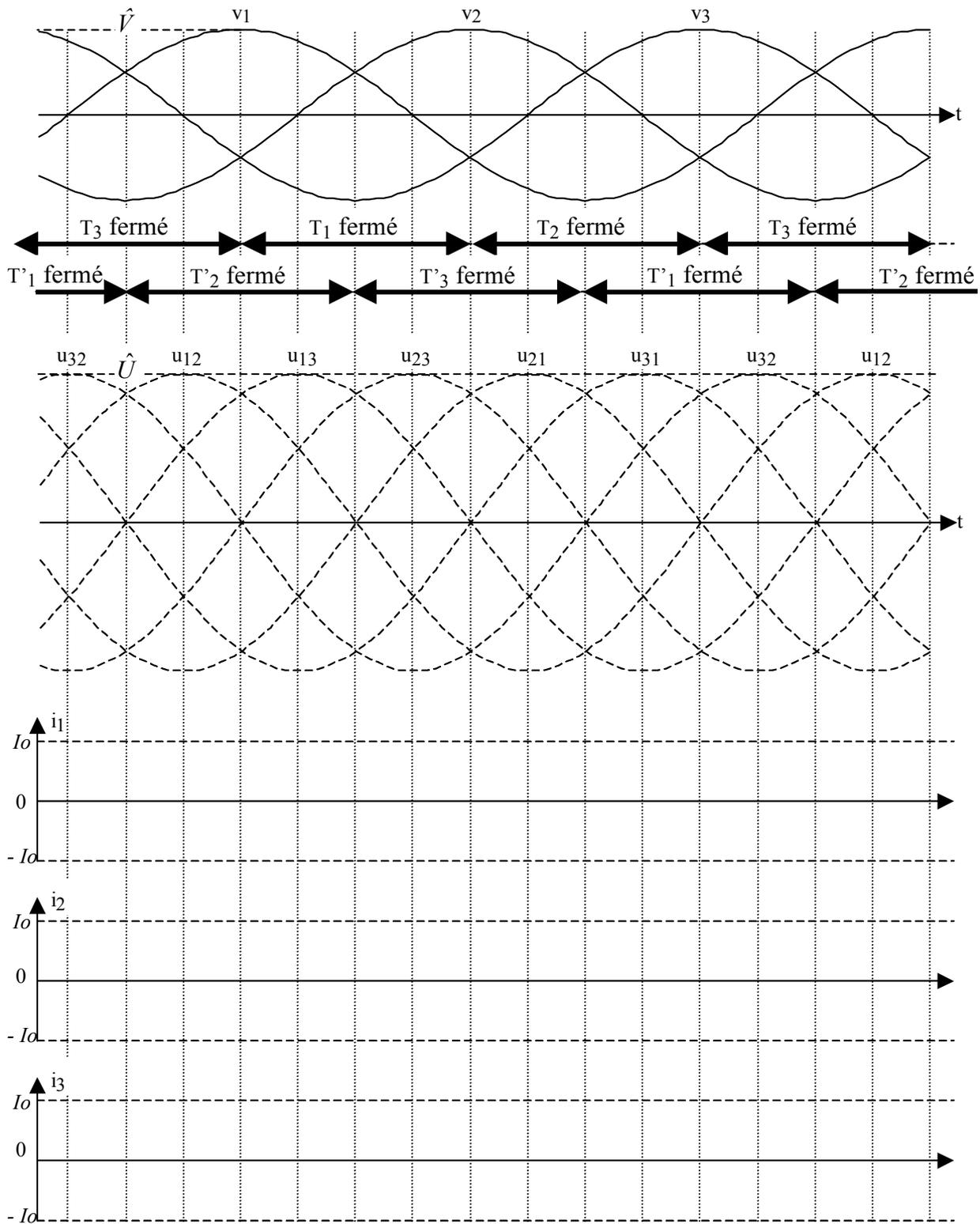
Après avoir rappelé la relation entre la valeur efficace d'un signal et la valeur efficace de ses harmoniques, montrer, sans faire aucun calcul, que la valeur efficace I_{1eff} de $i_1(t)$ est telle que

$$I_{1eff} > \frac{2.I_o.\sqrt{3}}{\sqrt{2}.\pi} = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}.I_o}{\sqrt{3}}$$

Calculer maintenant la valeur efficace I_{1eff} de $i_1(t)$.

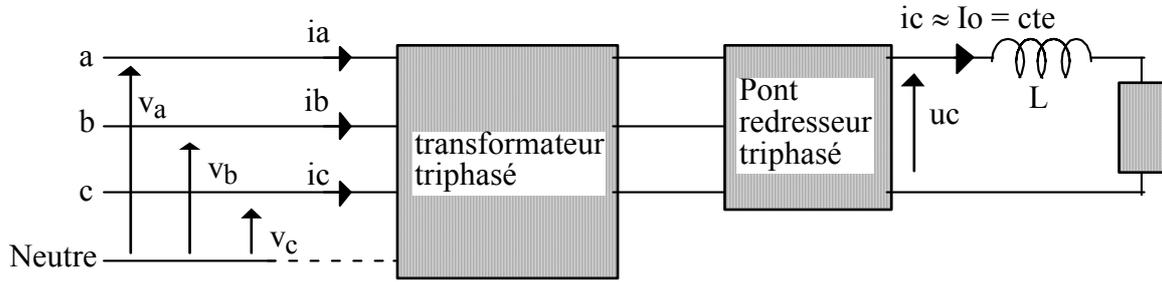
c) Calculer la puissance active P_1 reçue par la source v_1 en fonction de \hat{V} et I_o (On pourra procéder à partir de la définition de la puissance active (sous forme d'une intégrale), ou utiliser le résultat d'un des cas particuliers vus dans le cours).

d) Connaissant les intervalles de conduction des interrupteurs et les tensions $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$, représenter le graphe de $v_e(t)$ sur la feuille de réponse. Déterminer $V_{e moy}$ en fonction de \hat{V} .



Chap 6. Exercice 7 : Puissance instantanée et harmoniques en triphasé équilibré

Spectre des courants d'entrée d'une structure triphasée équilibrée: transformateur triphasé + pont redresseur triphasé débitant sur une charge très inductive.



* Les tensions $v_a(t)$, $v_b(t)$ et $v_c(t)$ sont alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées de sens direct, de période T et de pulsation $\omega = 2\pi.f = \frac{2\pi}{T}$ tels que $v_a(t) = \hat{V}.sin(\omega.t)$.

* Les courants $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$ forment un système triphasé équilibré (10) de sens direct. Le neutre n'est pas relié.

$$i_a(t) = \hat{I}_1.sin(\omega.t - \varphi_1) + \hat{I}_2.sin(2\omega.t - \varphi_2) + \dots + \hat{I}_n.sin(n\omega.t - \varphi_n) + \dots$$

$$i_b(t) = \hat{I}_1.sin\left(\omega.t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_1\right) + \hat{I}_2.sin\left[2.\left(\omega.t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_2\right] + \dots + \hat{I}_n.sin\left[n.\left(\omega.t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] + \dots$$

$$i_c(t) = \hat{I}_1.sin\left(\omega.t - \frac{4\pi}{3} - \varphi_1\right) + \hat{I}_2.sin\left[2.\left(\omega.t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_2\right] + \dots + \hat{I}_n.sin\left[n.\left(\omega.t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_n\right] + \dots$$

a) Pourquoi la valeur moyenne des courants est-elle nulle ?

b) Exprimer la puissance instantanée transportée par la ligne triphasée sous la forme:

$$p_e(t) = \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_1}{2}.cos(\varphi_1) - \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_2}{2}.cos(\dots - \varphi_2) + \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_4}{2}.cos(\dots - \varphi_4) - \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_5}{2}.cos(\dots - \varphi_5) + \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_7}{2}.cos(\dots - \varphi_7) - \frac{3.\hat{V}.\hat{I}_8}{2}.cos(\dots - \varphi_8) + \dots$$

c) Montrer que si le neutre n'est pas relié au transformateur triphasé, les harmoniques des courants $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$ de fréquence $3f$ et multiples de $3f$ sont nuls.

(On peut donc en déduire que dans ce cas, l'expression de $p_e(t)$ prend en compte tous les harmoniques des courants)

(10) Mais pas alternatif sinusoïdal...

d) La charge du pont redresseur reçoit une puissance instantanée $p_c(t) = u_c(t).i_c(t) = u_c(t).I_o$.

- Si la tension $u_c(t)$ est de période $T/3$ (par exemple avec un montage P3)

$$\Rightarrow p_c(t) = I_o \overline{U_c} + I_o \left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{U}_{3k} \cdot \sin(3k\omega.t + \alpha_{3k}) \right)$$

\Rightarrow Dans ce cas la fonction puissance instantanée dans la charge ne contient en plus de sa valeur moyenne que des harmoniques de pulsation $3\omega, 6\omega, 9\omega, 12\omega, \dots$ etc

- Si la tension $u_c(t)$ est de période $T/6$ (par exemple avec un montage PD3 à 6 thyristors)

$$\Rightarrow p_c(t) = I_o \overline{U_c} + I_o \left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{U}_{6k} \cdot \sin(6k\omega.t + \alpha_{6k}) \right)$$

\Rightarrow Dans ce cas la fonction puissance instantanée dans la charge ne contient en plus de sa valeur moyenne que des harmoniques de pulsation $6\omega, 12\omega, 18\omega, 24\omega, \dots$ etc

- On suppose le transformateur triphasé idéal (résistances des bobinages négligeables, pertes fer négligeables, fuites négligeables, inductances principales infinies). On suppose également que le transformateur est couplé sans neutre au primaire (11) et le pont redresseur idéal (pertes nulles).

Sachant que la puissance instantanée est conservative, en déduire par identification de $p_e(t)$ et $p_c(t)$ que:

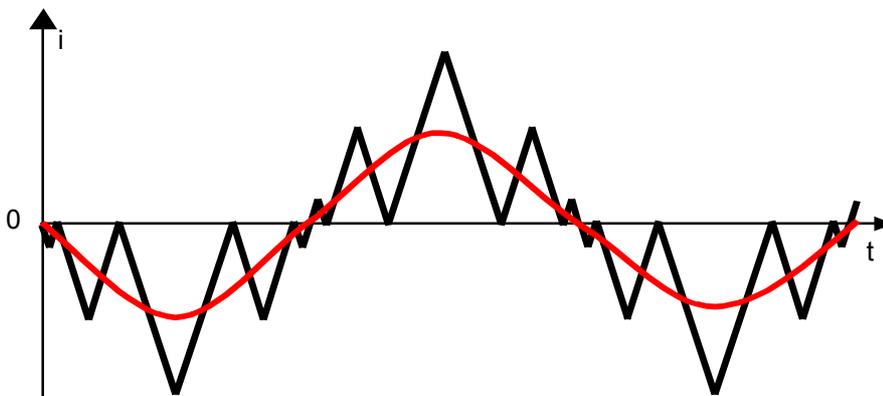
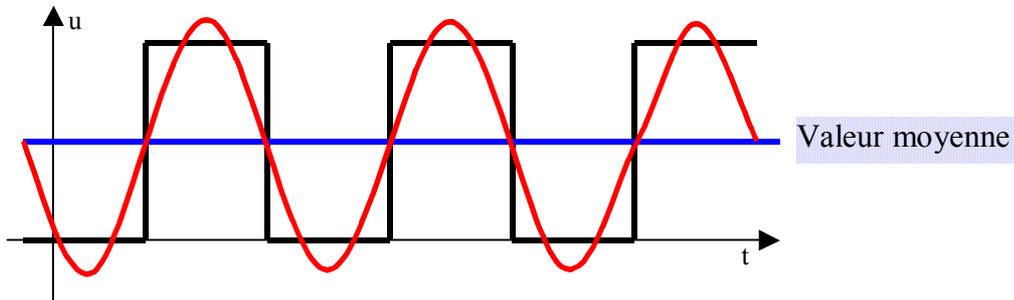
- Si $u_c(t)$ est de période $T/3$, les courants en ligne ne comportent que des harmoniques de rang 1 ; 2 et/ou 4 ; 5 et/ou 7 ; 8 et/ou 10 ... etc
- Si $u_c(t)$ est de période $T/6$, les courants en ligne ne comportent que des harmoniques de rang 1 ; 5 et/ou 7 ; 11 et/ou 13 ; 17 et/ou 19 ... etc
- Si $u_c(t)$ est de période $T/12$, les courants en ligne ne comportent que des harmoniques de rang 1 ... etc (Préciser...)

\Rightarrow Plus la période de la tension de sortie du pont redresseur sera faible par rapport à la période de la tension d'alimentation de la ligne triphasée (plus l'ordre du redressement sera élevé), et plus les harmoniques présents dans les courants de ligne seront d'ordre élevé, et donc plus leur filtrage sera facile.

(11) Si le primaire comporte un fil neutre, et que les courants secondaires présentent des harmoniques homopolaires (harmoniques 3 et multiples de 3) (cela suppose un neutre au secondaire), les courants primaires peuvent présenter des harmoniques homopolaires sans influence sur la puissance instantanée. Ces harmoniques homopolaires peuvent être étudiés séparément par la méthode des composantes symétriques et le théorème de superposition.

10 REPONSES AUX QUESTIONS DU COURS

Réponse 1:



[Retour](#)

Réponse 2:

* $v(t) = V_o = \text{constante}$: $P = V_o \cdot I_{moy} + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = V_o \cdot I_{moy}$

* $i(t) = I_o = \text{constante}$: $P = V_{moy} \cdot I_o + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = V_{moy} \cdot I_o$

* $v(t)$ et $i(t)$ alternatifs sinusoïdaux de même période ;

$$P = 0 + V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1) + 0 + \dots + 0 + \dots = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)$$

* $v(t)$ alternatif sinusoïdal et $i(t)$ périodique de même période :

$$P = 0 + V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1) + 0 + \dots + 0 + \dots = V_{eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1)$$

* $i(t)$ alternatif sinusoïdal et $v(t)$ périodique de même période :

$$P = 0 + V_{1eff} \cdot I_{1eff} \cdot \cos(\varphi_1) + 0 + \dots + 0 + \dots = V_{1eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_1)$$

[Retour](#)

Réponse 3:

➤ *Fig1* : le régime est alternatif sinusoïdal : le facteur de puissance est donc :
 $k_1 = \cos(\varphi) = \cos(0) = 1$

➤ *Fig2* : le régime est alternatif sinusoïdal : le facteur de puissance est donc :
 $k_2 = \cos(\varphi) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

➤ *Fig3* : L'harmonique fondamental du courant est déphasé de $-\frac{\pi}{3}$ par rapport à la tension. De plus, le courant présente des harmoniques autres que le fondamental. Mais sa valeur moyenne est nulle. Donc : $k_3 = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{1 + THD_f^2}} < \cos(\varphi_1) \Rightarrow k_3 < \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow k_3 < \frac{1}{2}$

➤ *Fig4* : L'harmonique fondamental du courant est déphasé de $-\frac{\pi}{3}$ par rapport à la tension. De plus, le courant présente des harmoniques autres que le fondamental, et sa valeur moyenne est non-nulle. Donc : $k_4 = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{\frac{(I_{moy})^2}{(I_{1eff})^2} + 1 + THD_f^2}} < k_3 < \frac{1}{2}$

[Retour](#)