FILTRAGE NUMERIQUE

première partie : analyse des filtres numériques

Pierre Le Bars
(avec la collaboration de Francis Gary)
lebars@moniut.univ-bpclermont.fr

FILTRAGE NUMERIQUE
première partie : analyse des filtres numériques

I/ Organisation générale

-1- Schéma général

Voir la figure « Introduction au cours EN22 ». La chaîne de traitement numérique comporte :

- un filtre analogique passe-bas d'antirepliement
- un échantillonneur de période d'horloge T_E
- un CAN fournissant, au rythme de l'horloge, une suite de nombres binaires exprimés sur B bits, représentant la mesure de $x(n.T_E)$. On notera x(n) ou x_n cette valeur. Ces nombres peuvent être exprimés sous différents codes (binaire naturel, binaire décalé, complément à 2 …)
- une unité de calcul effectuant un **algorithme** qui, à partir de la suite $\{x_n\}$, crée une autre suite $\{y_n\}$.

  Cet algorithme peut être simple (par exemple : $y_n = \frac{1}{2}.(x_n + x_{n-1})$)
  ou beaucoup plus sophistiqué : par exemple, à partir de 256 valeurs $x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-255}$, on peut calculer la FFT X_k, supprimer quelques raies indésirables de ce spectre pour obtenir le spectre Y_k et par FFT inverse obtenir la suite $\{y_n\}$.

  Cette unité de calcul peut être un ordinateur, un microprocesseur ou un DSP (Digital Signal Processor = processeur spécialisé dans le traitement numérique du signal)
- un CNA traduit sous forme analogique la suite numérique $\{y_n\}$ de sortie. Ce signal est en général maintenu constant sur une période d'échantillonnage (signal en « marches d'escalier »).
- un filtre (analogique) lisse le signal de sortie du CNA.

Dans la suite nous supposerons que le nombre B de bits est suffisant pour négliger les effets de la quantification, et que les convertisseurs d'entrée et de sortie ont le même quantum de conversion.

-2- Avantages du traitement numérique

- répétitivité — si on demande à 500 calculateurs d'effectuer l'algorithme $y_n = \frac{1}{2}.(x_n + x_{n-1})$, on aura toujours le même résultat. Par contre 500 circuits R-C présenteront une dispersion sur la fréquence de coupure.

- stabilité à long terme : pas de vieillissement des composants. On peut réaliser des filtres analogiques d'ordre n élevé, mais il faut alors des composants très précis et très stables (ne vieillissant pas), donc de coût élevé. A partir d'une certaine valeur ($n \geq 4$ ou 6), une réalisation numérique est préférable.

- reprogrammation : avec un même matériel, on passe facilement d'un filtre à un autre, en changeant simplement l'algorithme (logiciel). Avec un DSP, il suffit de changer une EPROM. Un appareil donné peut donc facilement évoluer.

- adaptation : le système peut lui-même adapter ses coefficients en fonction de l'environnement. On peut envisager par exemple un correcteur PID numérique dans une boucle d'asservissement ajustant automatiquement les paramètres K, T_i et T_d de façon à minimiser le temps de réponse.

- nouveaux filtres : avec les techniques numériques on peut réaliser des filtres n'ayant pas d'équivalent analogique. On peut citer tous les filtres à **phase linéaire.**

-3- <u>Inconvénient du traitement numérique</u>

Les filtres numériques sont limités en fréquence : en effet, pendant une période d'échantillonnage T_E, il faut avoir le temps de faire :

1. la conversion $A \rightarrow N$ (temps t_{convAN})
2. le calcul de y_n
3. la réorganisation de la mémoire (x_n devient x_{n-1}, x_{n-1} devient x_{n-2}, … pour la période suivante)
4. la conversion $N \rightarrow A$ (temps t_{convNA}. En général : $t_{convNA} \ll t_{convAN}$)

Si t_{calcul} désigne le temps nécessaire pour effectuer les phases 2 et 3, il faut que :

$$T_E > t_{convAN} + t_{calcul} + t_{convNA} \;\Rightarrow\; F_E < F_{MAX} = \frac{1}{t_{convAN} + t_{calcul} + t_{convNA}}$$

Or, le signal d'entrée x(t) est échantillonné et doit donc respecter le **<u>théorème de Shannon</u>** : $F_{Sup} < \frac{F_E}{2}$ (où F_{Sup} désigne la limite supérieure du spectre de x(t)).

En hautes fréquences (supérieures à quelques dizaines de mégahertz) on conserve les techniques analogiques.

II/ Méthodes générales d'étude des filtres numériques

<u>REMARQUE</u> : On retrouve pour l'étude des filtres numériques le même type d'outils (adaptés) que pour l'étude des filtres analogiques. Nous ferons systématiquement le parallèle (voir annexes 1 et 2).
Notons tout de même que si les outils sont comparables, les résultats seront nouveaux !

-1- Définition d'un filtre numérique

Un filtre numérique est un système numérique **linéaire invariant**.

Linéarité

Soient :

$y_1(n)$ la réponse à $x_1(n)$

$y_2(n)$ la réponse à $x_2(n)$

Si le système est linéaire, alors :

la réponse à $a.x_1(n)$ est $a.y_1(n)$, pour toute valeur de la constante a

la réponse à $x_1(n)+x_2(n)$ est $y_1(n)+y_2(n)$

D'une manière générale, si a et b sont deux constantes :

la réponse à $a.x_1(n)+b.x_2(n)$ est $a.y_1(n)+b.y_2(n)$

Invariance

Soit y(n) la réponse à x(n).

Si le système est invariant, la réponse à la **suite retardée x(n-k) est la suite retardée y(n-k)**, pour toute valeur du retard k.

-2- Equation de récurrence

Un filtre analogique peut être défini par une équation différentielle. Par exemple, pour un filtre du premier ordre :

$$y(t)+\tau.\frac{dy}{dt}=A.x(t)$$

De même, un filtre numérique est défini par une équation de récurrence (algorithme permettant de calculer y(n)) :

$$y(n)=a_0.x(n)+a_1.x(n-1)+...+a_Q.x(n-Q)-b_1.y(n-1)-b_2.y(n-2)-...-b_P.y(n-P)$$

ou encore :

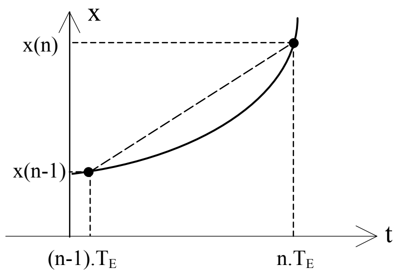
$$\boxed{y(n)+\sum_{k=1}^{P}b_k.y(n-k)=\sum_{\ell=0}^{Q}a_\ell.x(n-\ell)}$$

b_k et a_ℓ sont des constantes caractéristiques du filtre

-3- Exemples

On se propose de réaliser sous forme numérique un filtre ayant des propriétés comparables à celles d'un dérivateur analogique défini par l'équation différentielle

$$y(t)=\tau.\frac{dx}{dt}$$



Si T_E est suffisamment petit, on peut donner une expression approchée de la dérivée :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(n) - x(n-1)}{T_E}$$

On obtient l'équation de récurrence :

(1) $$\boxed{y(n) = \frac{\tau}{T_E}.\left[x(n) - x(n-1)\right]} \qquad \left(b_k = 0 \ \forall\, k \ ; \ a_0 = \frac{\tau}{T_E} \text{ et } a_1 = -\frac{\tau}{T_E}\right)$$

On peut chercher également à réaliser un intégrateur en utilisant la même approximation :

$$\tau.\frac{dy}{dt} = x \ \Rightarrow \ \tau.\frac{y(n) - y(n-1)}{T_E} = x(n)$$

soit :

(2) $$\boxed{y(n) - y(n-1) = \frac{T_E}{\tau}.x(n)} \qquad \left(b_1 = -1 \ ; \ a_0 = \frac{T_E}{\tau}\right)$$

-4- <u>Classification des filtres numériques</u>

Les exemples ci-dessus montrent qu'il existe deux types de filtres numériques.

4.1. <u>Filtres non récursifs</u>

y(n) est calculé en fonction seulement des entrées présente et passées x(n), x(n-1) … (voir le premier exemple).

L'équation de récurrence s'écrit simplement :

$$\underline{y(n) = \sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell.x(n-\ell)}$$

4.2. <u>Filtres récursifs</u>

C'est le cas du deuxième exemple : y(n) est calculé en fonction des entrées présente et passées, mais **aussi en fonction des valeurs passées de la sortie y(n-1),…** :

$$\underline{y(n) = \sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell.x(n-\ell) - \underline{\underline{\sum_{k=1}^{P} b_k.y(n-k)}}}$$

-5- <u>Réponse impulsionnelle</u>

On sait, en analogique, que la réponse impulsionnelle d'un filtre le définit complètement. Il en est de même pour les filtres numériques.

Notons toutefois une différence importante : l'impulsion analogique δ(t) n'est pas réalisable physiquement, alors que la suite numérique impulsionnelle δ(n) est facilement réalisable :

$$\begin{cases} \delta(n) = 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ \delta(n) = 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

On désignera par h(n) la réponse impulsionnelle du filtre.

5.1. <u>Filtres non récursifs</u>

Le filtre est défini par le récurrence :

$$y(n) = a_0.x(n) + a_1.x(n-1) + a_2.x(n-2) + ... + a_Q.x(n-Q)$$

On a donc :

$$h(0) = a_0.\underbrace{\delta(0)}_{=1} + a_1.\underbrace{\delta(-1)}_{=0} + a_2.\underbrace{\delta(-2)}_{=0} + ... + a_Q.\underbrace{\delta(-Q)}_{=0} = a_0$$

$$h(1) = a_0.\underbrace{\delta(1)}_{=0} + a_1.\underbrace{\delta(0)}_{=1} + a_2.\underbrace{\delta(-1)}_{=0} + ... + a_Q.\underbrace{\delta(1-Q)}_{=0} = a_1$$

etc ...

Soit finalement :

$$h(0) = a_0 \;\; ; \;\; h(1) = a_1 \;\; : \;\; ... \;\; ; \;\; h(Q) = a_Q \quad \text{et} \quad h(n) = 0 \text{ pour } n > Q$$

Il y a un nombre fini d'échantillons de la réponse impulsionnelle non nuls (de 0 à Q, soit Q+1 échantillons non nuls). Ces filtre sont appelés **Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie**[1] **(R.I.F.)** (ou FIR = Finite Impulse Response en anglais).

En résumé :

Filtre non récursif = Filtre R.I.F.	⇔	$y(n) = \sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell.x(n-\ell)$
	⇔	$y(n) = \sum_{\ell=0}^{Q} h(\ell).x(n-\ell)$
	⇔	$h(\ell) = a_\ell$

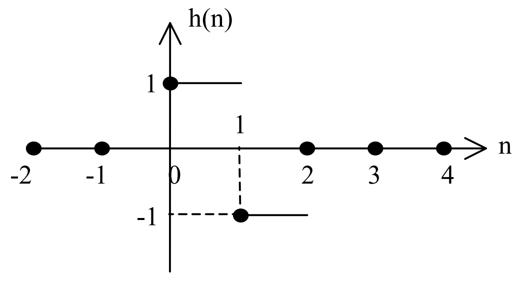
<u>Exemple</u> :

« dérivateur » avec $\tau = T_E$:

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$h(0) = 1 \;\; ; \;\; h(1) = -1$$

$$h(n) = 0 \quad \forall\, n \notin \{0,1\}$$



[1] On devrait dire en toute rigueur : **Filtre à Réponse Impulsionnelle de Durée Finie**

5.2. Filtres récursifs

Le filtre est défini par le récurrence :

$$y(n) = a_0.x(n) + a_1.x(n-1) + ... + a_Q.x(n-Q) - b_1.y(n-1) - b_2.y(n-2) - ... - b_P.y(n-P)$$

D'où :

$$h(n) = a_0.\delta(n) + a_1.\delta(n-1) + ... + a_Q.\delta(n-Q) - b_1.h(n-1) - b_2.h(n-2) - ... - b_P.h(n-P)$$

Pour n > Q :

$$h(n) = -b_1.h(n-1) - b_2.h(n-2) - ... - b_P.h(n-P) \ \neq \mathbf{0}$$

Il y a une infinité de valeurs non nulles de la réponse impulsionnelle. Ces filtres sont appelés **Filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie[2] (R.I.I.)** (IIR = Infinite Impulse Response en anglais).

En résumé :

Filtre récursif = Filtre R.I.I. $\Leftrightarrow$ $y(n) + \sum_{k=1}^{P} b_k.y(n-k) = \sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell.x(n-\ell)$ (il existe au moins un coefficient $b_k \neq 0$)

Exemple :

« intégrateur » avec $\tau = T_E$

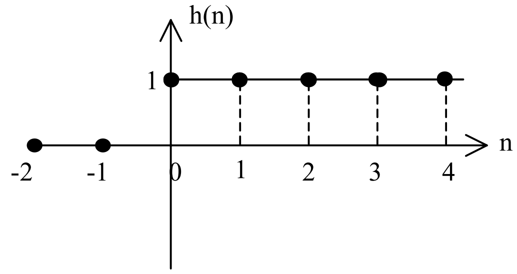
$y(n) - y(n-1) = x(n)$

$h(0) = \delta(0) + h(-1) = 1$ si $h(-1) = 0$

$h(1) = \delta(1) + h(1) = 0 + 1 = 1$

etc...

$h(n) = 1 \quad \forall\, n \geq 0$



-6- Convolution numérique

Le problème est le suivant : comme pour les filtres analogiques, la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique permet-elle de déterminer la réponse à n'importe quelle excitation x(n) ?

La réponse est évidemment OUI pour un filtre RIF : connaissant h(0), h(1) … h(Q) on en déduit la récurrence, qui permettra de déterminer y(n) pour une excitation x(n) donnée.

Le problème se pose pour les filtres RII.

On peut écrire :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).\delta(n-k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x(n-j).\delta(j)$$

En effet : $\delta(n-k) = 1$ si $n = k$ et 0 si $n \neq k$

(cette expression est à comparer à : $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).\delta(t-\theta).d\theta$)

On suppose connue la réponse impulsionnelle h(n).

[2] Comme pour les filtres RIF, on devrait dire en toute rigueur **Filtres à Réponse Impulsionnelle de Durée Infinie**

Excitation	Sortie	Propriété utilisée
$\delta(n)$	$h(n)$	
$\delta(n-k)$	$h(n-k)$	Invariance du filtre
$x(k).\ \delta(n-k)$	$x(k).h(n-k)$	Linéarité du filtre. k étant donné, x(k) est une constante
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).\delta(n-k)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).h(n-k)$	linéarité
$= x(n)$	$= y(n)$	

On obtient le **produit de convolution numérique** :

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).h(n-k) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x(n-\ell).h(\ell) \quad \text{changement d'indice} : \ell = n-k}$$

Remarque : pour un filtre RIF, on retrouve la récurrence car $h(\ell) = a_\ell$.

<u>Exemple</u> : cherchons la réponse indicielle de l'« intégrateur » (avec $\tau = T_E$) :

$x(n) = u(n) = 1$ si $n \geq 0$ et $x(n) = u(n) = 0$ si $n < 0$

On a vu que la réponse impulsionnelle du filtre est : $\begin{cases} h(n) = 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ h(n) = 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}$.

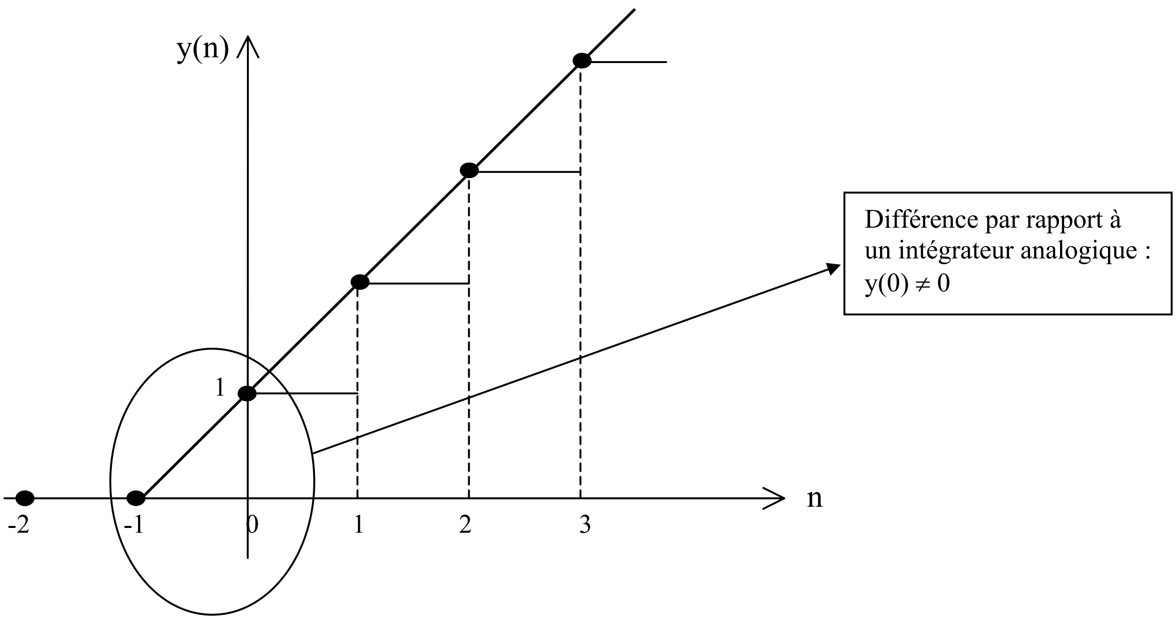
$$y(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x(n-\ell).h(\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} x(n-\ell).h(\ell)$$

Justification des limites : $h(\ell) = 0$ pour $\ell < 0$

$x(n-\ell) = 0$ pour $n-\ell < 0$ soit $\ell > n$

D'où :

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{n} x(n-\ell).h(\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} 1 = n+1$$



-7- <u>Réponse harmonique</u>

Une suite numérique sinusoïdale peut être obtenue en échantillonnant un signal sinusoïdal : $x(t) = X.\cos(\omega.t) \quad \Rightarrow \quad x(n) = X.\cos(\omega.n.T_E)$

ou encore, en travaillant avec les exponentielles complexes : $x(n) = X.e^{j.n.\omega.T_E}$.

(ne pas oublier que physiquement, seule la partie réelle de ce signal a un sens).

On suppose à priori le théorème de Shannon respecté, c'est à dire que :

$$f < \frac{f_E}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega.T_E < \pi$$

7.1. <u>Etude à partir de la réponse impulsionnelle</u>

On suppose que h(n) = 0 pour n < 0 (ce qui est en général le cas)

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} h(k).x(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} h(k).X.e^{j.(n-k).\omega.T_E} \\ &= X.e^{j.n.\omega.T_E}.\sum_{k=0}^{+\infty} h(k).e^{-j.k.\omega.T_E} \longleftarrow H(j.\omega) \end{aligned}$$

y(n) est également une suite numérique sinusoïdale de même pulsation ω. On peut définir la fonction de transfert en régime harmonique du filtre par :

$$\boxed{H(j.\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k).e^{-j.k.\omega.T_E} = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k).e^{-j.k.\Omega}}$$

en introduisant la pulsation réduite $\Omega = \omega.T_E$

La figure ci-dessous donne la signification physique de cette fonction de transfert.

$$x(n) = X.\cos(n.\omega.T_E) \Longrightarrow \boxed{\textbf{Filtre numérique}} \Longrightarrow y(n) = X.\left|H(j.\omega)\right|.\cos\left[n.\omega.T_E + \mathrm{Arg}\left(H(j.\omega)\right)\right]$$

7.2. <u>Etude à partir de la récurrence</u>

Soit $x(n) = X.e^{j.n.\omega.T_E}$ le signal d'entrée du filtre. En régime permanent, la sortie est également sinusoïdale : $y(n) = Y_M.e^{j.\varphi}.e^{j.n.\omega.T_E} = Y.e^{j.n.\omega.T_E}$ avec $Y = Y_M.e^{j.\varphi} \in \mathbb{C}$, en introduisant l'amplitude complexe Y.

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell . x(n-\ell) - \sum_{k=1}^{P} b_k . y(n-k)$$

$$\Rightarrow Y.\cancel{e^{j.n.\omega.T_E}} = \sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell . X.e^{j.(n-\ell).\omega.T_E} - \sum_{k=1}^{P} b_k . Y.e^{j.(n-k).\omega.T_E}$$

$$= \cancel{e^{j.n.\omega.T_E}} . \left[\sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell . X.e^{-j.\ell.\omega.T_E} - \sum_{k=1}^{P} b_k . Y.e^{-j.k.\omega.T_E} \right]$$

$$\Rightarrow Y.\left[1 + \sum_{k=1}^{P} b_k . e^{-j.k.\omega.T_E} \right] = X.\sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell . e^{-j.\ell.\omega.T_E}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{X} = H(j.\omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell . e^{-j.\ell.\omega.T_E}}{1 + \sum_{k=1}^{P} b_k . e^{-j.k.\omega.T_E}}$$

Remarque : y(n - k) correspond à l'échantillonnage de y(t - k.T_E), c'est à dire y(t) retardé de k.T_E. Or la fonction de transfert d'un retard est $e^{-j.k.T_E.\omega}$.

En résumé :

$$\boxed{H(j.\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k).e^{-j.k.\Omega} = \frac{\sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell . e^{-j.\ell.\Omega}}{1 + \sum_{k=1}^{P} b_k . e^{-j.k.\Omega}} \qquad \text{en posant } \Omega = \omega.T_E}$$

h(k), a_ℓ et b_k sont **réels**.

-8- Exemple

On désire réaliser un filtre numérique qui se comporterait comme un système analogique du premier ordre défini par l'équation différentielle : $y + \tau.\frac{dy}{dt} = x$, avec $\tau = T_E$.

En utilisant l'approximation de la dérivée : $\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(n) - y(n-1)}{T_E}$, il vient :

$$y(n) + \frac{\tau}{T_E}.\left[y(n) - y(n-1) \right] = x(n) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(n) - \frac{1}{2}.y(n-1) = \frac{1}{2}.x(n)}$$

Il s'agit d'un filtre récursif ou filtre RII (à réponse impulsionnelle de durée infinie).

8.1. Réponse impulsionnelle

$$h(n) - \frac{1}{2}.h(n-1) = \frac{1}{2}.\delta(n) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h(0) = \frac{1}{2} & (\text{si } h(-1) = 0) \\ h(n) = \frac{1}{2}.h(n-1) & \end{cases}$$

On retrouve la définition d'une progression géométrique :

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{pour } \ n \geq 0$$

8.2. Réponse indicielle

L'entrée est une suite échelon unité u(n) : $u(n) = 1$ pour $n \geq 0$ et $u(n) = 0$ pour $n < 0$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).h(n-k)$$

car $h(n-k) = 0$ pour $k > n$

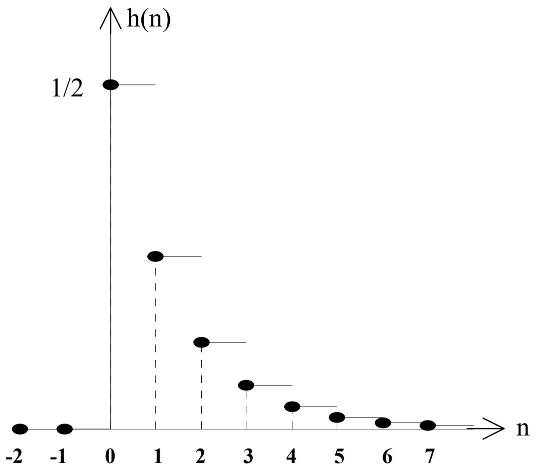
$$= \sum_{k=0}^{n} 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k}$$

car $x(k) = 0$ pour $k < 0$

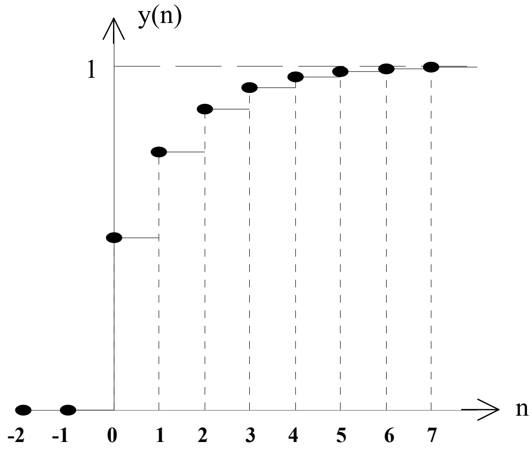
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} . \sum_{k=0}^{n} 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} . \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} \qquad \Rightarrow \quad \boxed{y(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \quad \text{pour } \ n \geq 0$$

Réponse impulsionnelle



Réponse indicielle



8.3. Réponse harmonique

A partir de la récurrence, on obtient directement :

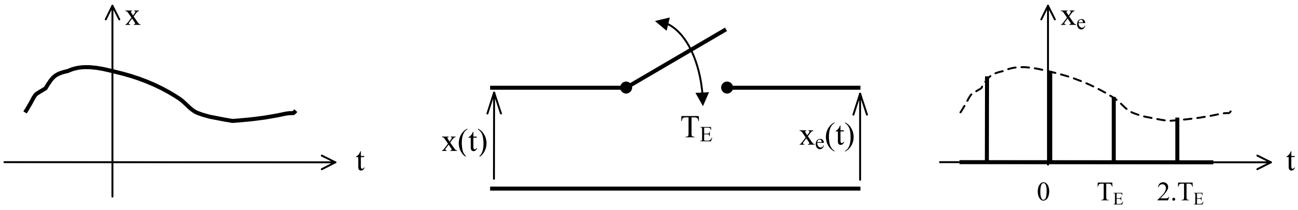
$$H(j.\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}.e^{-j.\Omega}} = \frac{1}{2 - e^{-j.\Omega}}$$

où : $\Omega = \omega.T_E$ ($0 \leq \Omega \leq \pi$: théorème de Shannon)

III/ Transformée en Z

On a cherché pour les filtres numériques un outil comparable à la transformée de Laplace pour les filtres analogiques. Cet outil est la transformée en Z.

-1- Transformée de Laplace d'un signal échantillonné



Voir le chapitre sur l'échantillonnage :

$$x_e(t) = T_E.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n.T_E).\delta(t - n.T_E)$$

et

$$\lim_{T_E \to 0} x_e(t) = x(t)$$

Supposons que x(t) = 0 pour t < 0. On a donc : $x(n.T_E) = 0$ pour n < 0.
Soit X(p) la transformée de Laplace de x(t).

$$X_e(p) = \mathscr{L}\left[x_e(t)\right]$$

$$= \mathscr{L}\left[T_E.\sum_{n=0}^{+\infty} x(n.T_E).\delta(t - n.T_E)\right] \qquad \text{(car } x(n.T_E) = 0 \text{ pour } n < 0\text{)}$$

$$= T_E.\sum_{n=0}^{\infty} x(n.T_E).\mathscr{L}\left[\delta(t - n.T_E)\right] \qquad \text{(linéarité de la transformée de Laplace)}$$

$$= T_E.\sum_{n=0}^{\infty} x(n.T_E).e^{-n.T_E.p} \qquad (\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = 1 \quad \text{et} \quad \text{retard})$$

$$= T_E.\sum_{n=0}^{\infty} x(n.T_E).\left(e^{T_E.p}\right)^{-n}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_e(p) = T_E.\sum_{n=0}^{\infty} x(n.T_E).z^{-n}} \qquad \text{(en posant : } z = e^{T_E.p}\text{)}$$

-2- Transformée en Z : définition

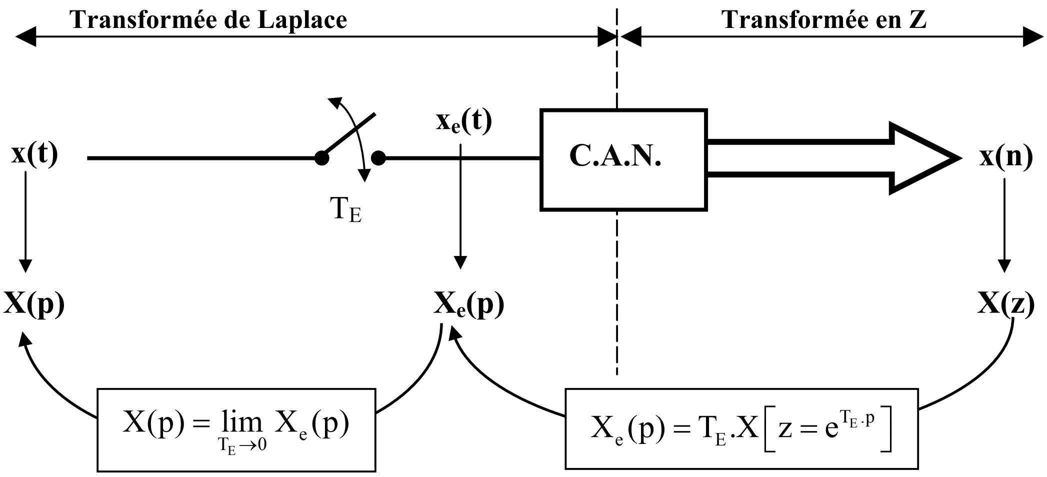
Dans le cas d'une chaîne de traitement numérique : $x(n) = x(n.T_E)$. On généralise l'expression obtenue ci-dessus à tout signal numérique, même non issu d'un signal analogique échantillonné (par exemple la sortie d'un filtre numérique).

Par définition, la transformée en Z X(z) d'un signal numérique x(n) est :

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}\left[x(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n}} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

-3- Transformée de Laplace et transformée en Z

Soit x(t) un signal analogique de transformée de Laplace X(p). Ce signal est échantillonné, puis, à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique, on obtient la suite numérique x(n). La figure ci-dessous indique les liens entre les transformées de Laplace X(p) et $X_e(p)$ et la transformée en Z, X(z).



-4- Exemples

4.1. Impulsion

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\Delta(z)} = \mathcal{Z}\left[\delta(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n).z^{-n} = z^{-0} \underline{= 1}$$

Ce résultat est évidemment à comparer à la transformée de Laplace : $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$

4.2. Echelon unité

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

D'où

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - z^{-(N+1)}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (\text{si } \left|z^{-1}\right| < 1)$$

Soit :

$$\underline{U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}}$$

Remarque : cette suite peut être obtenue en échantillonnant un échelon unité analogique γ(t) :

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow \Gamma_e(p) = T_E . \frac{1}{1 - e^{-T_E \cdot p}}$$

$$\Rightarrow \underline{\Gamma(p)} = \lim_{T_E \to 0} T_E . \frac{1}{1 - e^{-T_E \cdot p}} = \lim_{T_E \to 0} T_E . \frac{1}{1 - (1 - T_E . p)} = \underline{\frac{1}{p}}$$

transformée de Laplace bien connue.

4.3. « Exponentielle »

Soit la suite numérique : $x(n) = a^n.u(n)$: $(x(n) = a^n$ pour $n \geq 0$ et $x(n) = 0$ pour $n < 0)$.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a.z^{-1}\right)^n = \lim_{N \to \infty} \frac{1-\left(a.z^{-1}\right)^{N+1}}{1-a.z^{-1}} = \frac{1}{1-a.z^{-1}} \quad (\text{si } \left|a.z^{-1}\right| < 1)$$

Soit :

$$\underline{X(z) = \frac{1}{1-a.z^{-1}} = \frac{z}{z-a}}$$

Pour faire le parallèle avec la transformée de Laplace, quel est le signal x(t) qui après échantillonnage donne $x(n.T_E) = a^n$?

Posons : $x(t) = e^{\alpha.t}$

On a : $x(n.T_E) = e^{\alpha.n.T_E} = \left(e^{\alpha.T_E}\right)^n = a^n \Rightarrow a = e^{\alpha.T_E}$ soit $\alpha = \frac{1}{T_E}.\mathrm{Ln}(a)$

D'où :

$$X_e(p) = T_E.X\left(z = e^{T_E.p}\right) = T_E.\frac{1}{1-a.e^{-T_E.p}} = T_E.\frac{1}{1-e^{\alpha.T_E}.e^{-T_E.p}} = T_E.\frac{1}{1-e^{(\alpha-p).T_E}}$$

$$\Rightarrow X(p) = \lim_{T_E \to 0} X_e(p) = \lim_{T_E \to 0} T_E.\frac{1}{1-e^{(\alpha-p).T_E}} = \lim_{T_E \to 0} T_E.\frac{1}{1-\left[1+(\alpha-p).T_E\right]} = \frac{1}{p-\alpha} = \mathscr{L}\left[e^{\alpha.t}\right]$$

IV/ Propriétés de la transformée en Z

-1- Linéarité

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x_1(n) \overset{\text{T.Z.}}{\leftrightarrow} X_1(z) \\ x_2(n) \overset{\text{T.Z.}}{\leftrightarrow} X_2(z) \end{array}\right\} \Rightarrow a.x_1(n) + b.x_2(n) \overset{\text{T.Z.}}{\leftrightarrow} a.X_1(z) + b.X_2(z)} \quad (a \text{ et } b = \text{constantes})$$

Exemple d'application :

$$x(n) = \cos\left(n.\omega.T_E\right).u(n) = \frac{1}{2}.\left[e^{j.n.\omega.T_E} + e^{-j.n.\omega.T_E}\right].u(n) = \frac{1}{2}\left[\left(e^{j.\omega.T_E}\right)^n.u(n) + \left(e^{-j.\omega.T_E}\right)^n.u(n)\right]$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{j.\omega.T_E}.z^{-1}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{1-e^{-j.\omega.T_E}.z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1-e^{j.\omega.T_E}.z^{-1} + 1 - e^{-j.\omega.T_E}.z^{-1}}{\left(1-e^{j.\omega.T_E}.z^{-1}\right).\left(1-e^{-j.\omega.T_E}.z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1-\cos\left(\omega.T_E\right).z^{-1}}{1-2.\cos\left(\omega.T_E\right).z^{-1} + z^{-2}}$$

-2- Retard

Soient x(n) une suite « causale » (x(n) = 0 pour n < 0) et X(z) sa transformée en Z. On considère la suite y(n) = x(n - k), c'est à dire la suite x(n) retardée de k échantillons.

Problème : quelle est sa transformée en Z, Y(z) ?

En utilisant le parallèle avec la transformée de Laplace[3] :

$x_e(t)$ donne $x(n)$ avec $X_e(p) = T_E.X\left(z = e^{T_E \cdot p}\right)$

$y_e(t) = x_e(t - k.T_E)$ donne $y(n)$ avec $Y_e(p) = T_E.Y\left(z = e^{T_E \cdot p}\right)$

Or :

$$\left.\begin{aligned} Y_e(p) &= e^{-k.T_E \cdot p}.X_e(p) \\ &= \left(e^{T_e \cdot p}\right)^{-k}.T_E.X\left(z = e^{T_e \cdot p}\right) \\ &= T_E.\left[z^{-k}.X(z)\right]_{z = e^{T_e \cdot p}} \\ &= T_E.Y\left(z = e^{T_e \cdot p}\right) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = z^{-k}.X(z)$$

En résumé : $\boxed{\mathcal{Z}\left[x(n-k)\right] = z^{-k}.\mathcal{Z}\left[x(n)\right]}$

-3- Changement d'échelle

En utilisant toujours le parallèle :

$$x(t) \overset{\text{Laplace}}{\rightarrow} X(p)$$

$$x(t).e^{p_0 \cdot t} \overset{\text{Laplace}}{\rightarrow} X(p - p_0)$$

Si on pose $z = e^{T_E \cdot p}$, la transformation $p \rightarrow p - p_0$, revient à remplacer z par $e^{(p - p_0).T_E} = \dfrac{e^{p.T_E}}{e^{p_0 \cdot E}} = \dfrac{z}{z_0}$ en posant $z_0 = e^{p_0 \cdot T_E}$. De plus le signal $x(t).e^{p_0 \cdot t}$ donne par échantillonnage la suite numérique $x(n).e^{p_0 \cdot n.T_E} = x(n).\left(e^{p_0 \cdot T_E}\right)^n = z_0{}^n.x(n)$.

On a donc la propriété suivante :

$$\boxed{x(n) \overset{\text{T.Z.}}{\leftrightarrow} X(z) \quad \Rightarrow \quad z_0{}^n.x(n) \overset{\text{T.Z.}}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right)}$$

Vérification :

$$X\left(\frac{z}{z_0}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z_0{}^n.z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n).z^{-n} = Y(z) \quad \text{en posant } y(n) = x(n).z_0{}^n$$

Exemple d'application :

1) $u(n) \overset{\text{T.Z.}}{\leftrightarrow} U(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad a^n.u(n) \overset{\text{T.Z.}}{\leftrightarrow} \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{z}{a}\right)^{-1}} = \dfrac{1}{1 - a.z^{-1}}$

résultat que nous avions obtenu directement à partir de la définition de la transformée en Z.

[3] Le parallèle avec la transformée de Laplace n'est pas une démonstration, mais permet de comprendre (ou de retrouver rapidement) certaines propriétés de la transformée en Z. Pour une démonstration rigoureuse, voir le cours de math.

2) Sinusoïde amortie

$$\cos(n.\omega.T_E) \overset{T.Z.}{\leftrightarrow} \frac{1-\cos(\omega.T_E).z^{-1}}{1-2.\cos(\omega.T_E).z^{-1}+z^{-2}}$$

$\Rightarrow$

$$a^n.\cos(n.\omega.T_E) \overset{T.Z.}{\leftrightarrow} \frac{1-\cos(\omega.T_E).\left(\frac{z}{a}\right)^{-1}}{1-2.\cos(\omega.T_E).\left(\frac{z}{a}\right)^{-1}+\left(\frac{z}{a}\right)^{-2}} = \frac{1-a.\cos(\omega.T_E).z^{-1}}{1-2.a.\cos(\omega.T_E).z^{-1}+a^2.z^{-2}}$$

-4- <u>Transformée en Z de la suite n.x(n)</u>

Soit x(t) un signal, de transformée de Laplace X(p), donnant après échantillonnage la suite x(n) de transformée en Z, X(z) : $X(p) = T_E.X\left(z = e^{T_E.p}\right)$ [4]

La transformée de Laplace de t.x(t) est :

$$\mathscr{L}[t.x(t)] = -\frac{dX}{dp} = -T_E.\frac{dX}{dz}.\frac{dz}{dp} = -T_E^{\,2}.z.\frac{dX}{dz}$$

car : $z = e^{T_E.p} \Rightarrow \frac{dz}{dp} = T_E.e^{T_E.p} = T_E.z$

En échantillonnant le signal t.x(t), on obtient la suite $T_E.n.x(n) = T_E.y(n)$, en posant y(n) = n.x(n), dont la transformée en Z est $T_E.Y(z)$. La transformée de Laplace de t.x(t) est donc : $T_E.[T_E.Y(z)]_{z=e^{T_E.p}} = T_E^{\,2}Y\left(z = e^{T_E.p}\right)$.

En égalant les deux expressions de la transformée de Laplace de t.x(t), on obtient :

$$-T_E^{\,2}.z.\frac{dX}{dz} = T_E^{\,2}.Y(z)$$

D'où :

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}[n.x(n)] = -z.\frac{dX}{dz} = z^{-1}.\frac{dX}{d(z^{-1})}}$$

Application : transformée en Z d'une rampe numérique n.u(n) = y(n)

$$\underline{Y(z)} = z^{-1}.\frac{d}{d(z^{-1})}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \underline{\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}}$$

-5- <u>Théorèmes des valeurs initiale et finale</u>

Avec la transformée de Laplace on sait que :

$$\begin{cases} x(0^+) = \lim\limits_{p\to\infty} p.X(p) \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{p\to 0} p.X(p) \end{cases}$$

En posant $z = e^{T_E.p}$ on a : $\underline{p\to\infty \Rightarrow z\to\infty \quad \text{et} \quad p\to 0 \Rightarrow z\to 1}$

[4] pour alléger l'écriture, nous omettons volontairement dans ce paragraphe $\lim\limits_{T_E\to 0}$

5.1. Valeur initiale $(z \to \infty)$

Si $z \to \infty$, alors $z^{-1} \to 0$ et :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n).z^{-n} = x(0) + \underbrace{x(1).z^{-1} + x(2).z^{-2} + \dots}_{0 \text{ quand } z \to \infty} = x(0)$$

D'où :

$$\boxed{x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z^{-1} \to 0} X(z)}$$

5.2. Valeur finale $(z \to 1)$

Lorsque $p \to 0$, $z = e^{T_E.p} \approx 1 + T_E.p$, ou encore : $p \approx \frac{1}{T_E}.(z-1)$ quand $z \to 1$.

On peut donc écrire, lorsque $p \to 0$ (ou $z \to 1$) :

$$X(p) = \lim_{T_E \to 0} T_E.X\left(z = e^{T_E.p}\right) \Rightarrow p.X(p) = \lim_{T_E \to 0} \frac{1}{T_E}.(z-1).T_E.X\left(z = e^{T_E.p}\right) \qquad \text{quand } z \to 1$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{p \to 0} p.X(p) = \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1).X(z) = \lim_{z^{-1} \to 1} \left(1 - z^{-1}\right).X(z)}$$

Exemple :

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2.\left(1 - z^{-1}\right).\left(1 - 0{,}5.z^{-1}\right)} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = \lim\limits_{z^{-1} \to 0} X(z) = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{n \to \infty} x(n) = \lim\limits_{z^{-1} \to 1} (1 - z^{-1}).X(z) = \lim\limits_{z^{-1} \to 1} \dfrac{1 + z^{-1}}{2.\left(1 - 0{,}5.z^{-1}\right)} = 2 \end{cases}$$

-6- Transformée en Z d'un produit de convolution numérique

Comme pour la transformée de Laplace :
la transformée en Z d'un produit de convolution numérique est le produit des transformées en Z

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k).h(n-k) \Leftrightarrow Y(z) = X(z).H(z)}$$

Remarque : on suppose ici les suites causales, c'est à dire que $x(n) = h(n) = 0$ pour $n < 0$.
Cette propriété peut se montrer aisément (et nous nous priverons pas de ce plaisir…) :
Par définition :

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} x(k).h(n-k) \right].z^{-n}$$

D'autre part :

$$X(z).H(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k).z^{-k} \right) . \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell).z^{-\ell} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+\ell=n} x(k).h(\ell) \right) .z^{-n}$$

on prend tous les termes tels que $k + \ell = n$
(voir le produit de deux polynômes)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x(k).h(n-k) \right) .z^{-n}$$

$$= Y(z)$$

-7- Suite originale d'une fraction

Le problème est le suivant : soit $X(z) = \dfrac{a_0 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} + ... + a_Q.z^{-Q}}{1 + b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2} + ... + b_P.z^{-P}}$. Quelle est la suite originale x(n) telle que $X(z) = \mathcal{Z}\left[x(n)\right]$?

On dispose de deux méthodes :

1. méthode calquée sur la transformée de Laplace : décomposition en éléments simples.
2. méthode liée au caractère numérique de la transformée en Z : division des polynômes.

7.1. Décomposition en éléments simples

Pour simplifier, on suppose que le dénominateur ne présente pas de racines multiples.

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} + ... + a_Q.z^{-Q}}{1 + b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2} + ... + b_P.z^{-P}}$$

$$= \frac{a_0 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} + ... + a_Q.z^{-Q}}{\left(1 - p_1.z^{-1}\right).\left(1 - p_2.z^{-1}\right)....\left(1 - p_P.z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{C_1}{1 - p_1.z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2.z^{-1}} + ... + \frac{C_P}{1 - p_P.z^{-1}}$$

$$\Rightarrow$$

$$x(n) = C_1.p_1{}^n.u(n) + C_2.p_2{}^n.u(n) + ... + C_P.p_P{}^n.u(n)$$

7.2. Division des polynômes

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1.z^{-1} + a_2.z^{-2} + ... + a_Q.z^{-Q}}{1 + b_1.z^{-1} + b_2.z^{-2} + ... + b_P.z^{-P}}$$

$$= c_0 + c_1.z^{-1} + c_2.z^{-2} + ...$$

$$= x(0) + x(1).z^{-1} + x(2).z^{-2} + ...$$

On a donc :

$x(0) = c_0$; $x(1) = c_1$; $x(2) = c_2$; ...

Intérêt : cette méthode permet d'obtenir rapidement les premiers échantillons. Elle est en particulier intéressante pour l'étude des réponses des filtres RIF.

7.3. Exemple

$$\text{Soit } X(z)=\frac{1+z^{-1}}{2.\left(1-z^{-1}\right).\left(1-\frac{1}{2}.z^{-1}\right)}=\frac{1}{2}.\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{3}{2}.z^{-1}+\frac{1}{2}.z^{-2}}$$

Méthode n°1

$$X(z)=\frac{1}{2}.\frac{4}{1-z^{-1}}+\frac{1}{2}.\frac{-3}{1-\frac{1}{2}.z^{-1}} \Rightarrow x(n)=2.u(n)-\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.u(n)$$

Méthode n°2

$$\begin{array}{rl|l}
 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}.z^{-1} & 1-\frac{3}{2}.z^{-1}+\frac{1}{2}.z^{-2} \\ \hline
- & \frac{1}{2}-\frac{3}{4}.z^{-1}+\frac{1}{4}.z^{-2} & \frac{1}{2}+\frac{5}{4}.z^{-1}+\frac{13}{8}.z^{-2}+\ldots \\ \cline{2-2}
 & \frac{5}{4}.z^{-1}-\frac{1}{4}.z^{-2} & \\
- & \frac{5}{4}.z^{-1}-\frac{15}{8}.z^{-2}+\frac{5}{8}.z^{-3} & \\ \cline{2-2}
 & \frac{13}{8}.z^{-2}-\frac{5}{8}.z^{-3} &
\end{array}$$

V/ Application de la transformée en Z à l'étude des filtres numériques

-1- Fonction de transfert

Soit un filtre numérique défini par la récurrence :

$$y(n)+b_1.y(n-1)+\ldots+b_P.y(n-P)=a_0.x(n)+a_1.x(n-1)+\ldots+a_Q.x(n-Q)$$

Cette relation étant vraie pour toutes valeurs de n, on peut affirmer l'égalité des transformées en Z de chaque membre :

$$\mathcal{Z}\left[y(n)+b_1.y(n-1)+\ldots+b_P.y(n-P)\right]=\mathcal{Z}\left[a_0.x(n)+a_1.x(n-1)+\ldots+a_Q.x(n-Q)\right]$$

$$\Rightarrow Y(z)+b_1.z^{-1}.Y(z)+\ldots+b_P.z^{-P}.Y(z)=a_0.X(z)+a_1.z^{-1}.X(z)+\ldots+a_Q.z^{-Q}.X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z).\left[1+b_1.z^{-1}+\ldots+b_P.z^{-P}\right]=X(z).\left[a_0+a_1.z^{-1}+\ldots+a_Q.z^{-Q}\right]$$

Soit :

$$Y(z)=H(z).X(z) \quad \text{où} : H(z)=\frac{a_0+a_1.z^{-1}+\ldots+a_Q.z^{-Q}}{1+b_1.z^{-1}+\ldots+b_P.z^{-P}}$$

H(z) est la fonction de transfert en Z du filtre numérique.

$$\boxed{y(n)+\sum_{k=1}^{P}b_k.y(n-k)=\sum_{\ell=0}^{Q}a_\ell.x(n-\ell) \Leftrightarrow H(z)=\frac{\sum_{\ell=0}^{Q}a_\ell.z^{-\ell}}{1+\sum_{k=1}^{P}b_k.z^{-k}}}$$

Remarque : pour les filtres RIF, $b_k = 0 \ \forall k$. La fonction de transfert H(z) est simplement un polynôme en z^{-1} : $H(z) = a_0 + a_1.z^{-1} + ... + a_Q.z^{-Q}$

-2- Réponse impulsionnelle

Dans le cas particulier où l'excitation du filtre est une suite impulsionnelle : $x(n) = \delta(n)$, la réponse s'identifie à la réponse impulsionnelle : $y(n) = h(n)$. Or la transformée en Z de la suite impulsionnelle est $\Delta(z) = \mathcal{Z}[\delta(n)] = 1$; on a donc : $Y(z) = \mathcal{Z}[h(n)] = H(z) \times 1 = H(z)$.

La fonction de transfert H(z) est la transformée en Z de la réponse impulsionnelle.

-3- Exemple

Soit le filtre défini par la récurrence $y(n) - \frac{1}{2}.y(n-1) = \frac{1}{2}.x(n)$ (voir § II - 8).

Fonction de transfert : $$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}.z^{-1}}$$

Réponse impulsionnelle : $$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n.u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.u(n)$$

Réponse indicielle : $$x(n) = u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}.z^{-1}\right)}$$

Sans calcul, on peut dire que :

$$\begin{cases} y(0) = \lim\limits_{z^{-1} \to 0} Y(z) = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{n \to \infty} y(n) = \lim\limits_{z^{-1} \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) Y(z) = 1 \end{cases}$$

Et, en décomposant en éléments simples :

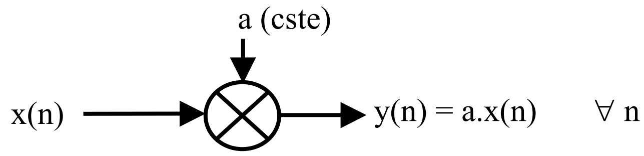
$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}.z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}.z^{-1}\right)}$$

$$\Rightarrow y(n) = u(n) - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n.u(n) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right].u(n)$$

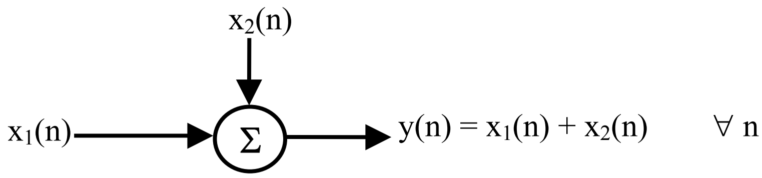
-4 Représentation sous forme de schéma bloc

On donne souvent la structure d'un filtre numérique en le représentant sous forme de schéma bloc. Les trois opérateurs de base sont :

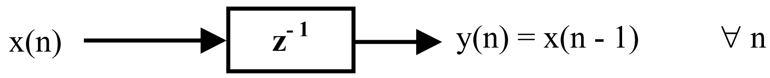
1. multiplication par une constante : symbole



2. somme de deux signaux numériques : symbole

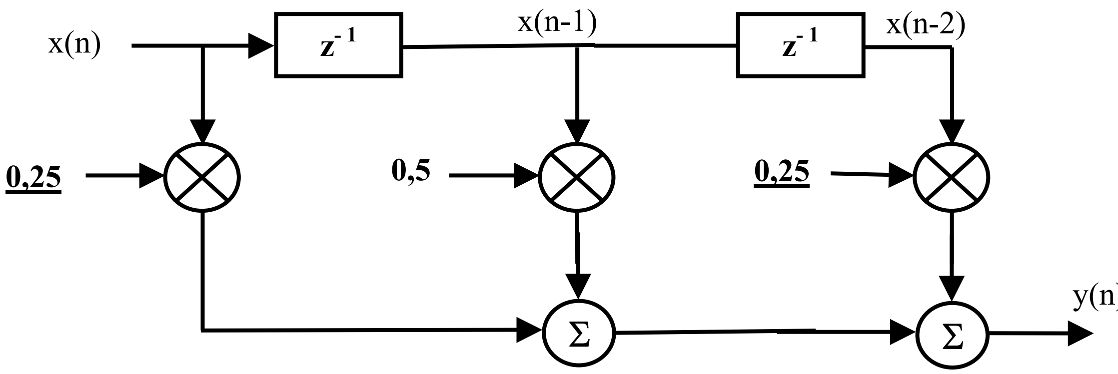


3. retard : symbole

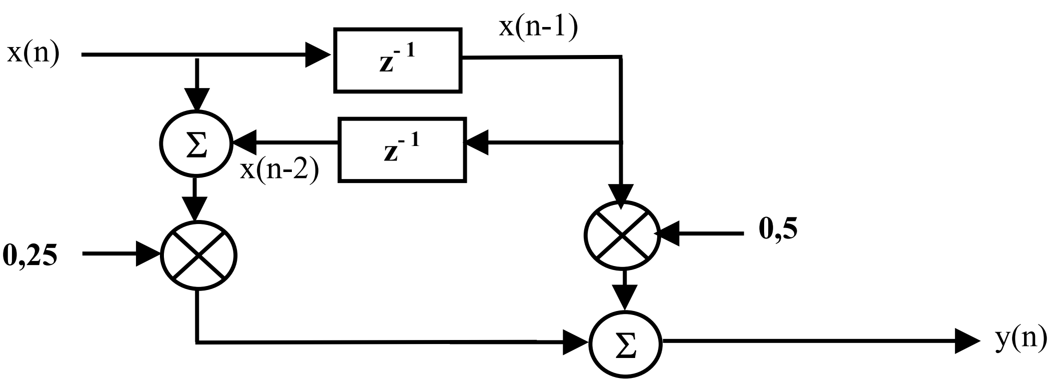


Voici deux exemples de filtres numériques représentés sous forme de schéma bloc :

Filtre RIF : $y(n) = \frac{1}{4}.x(n) + \frac{1}{2}.x(n-1) + \frac{1}{4}.x(n-2)$

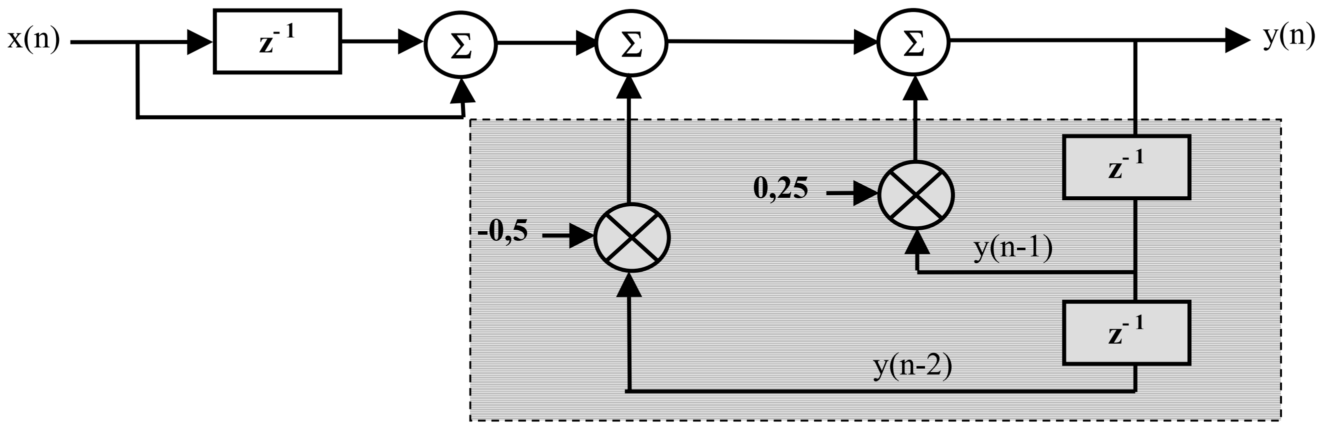


On peut donner une variante à cette réalisation, en remarquant qu'on a deux fois le coefficient 0,25 (on effectue deux multiplications au lieu de trois) :



Filtre RII : $y(n) = x(n) + x(n-1) - \left[-\frac{1}{4}.y(n-1) + \frac{1}{2}.y(n-2) \right]$

La partie grisée met en évidence le caractère récursif de ce filtre.



-5- Réponse harmonique

On a établi, soit à partir de la récurrence, soit à partir de la réponse impulsionnelle, la fonction de transfert en régime harmonique d'un filtre numérique :

$$H(j.\omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell.\left(e^{j.\omega.T_E}\right)^{-\ell}}{1 + \sum_{k=1}^{P} b_k.\left(e^{j.\omega.T_E}\right)^{-k}}$$

En comparant avec la fonction de transfert H(z) :

$$H(z) = \frac{\sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell.z^{-\ell}}{1 + \sum_{k=1}^{P} b_k.z^{-k}}$$

on voit que :

$$\boxed{H(j.\omega) = H\left[z = e^{j.\omega.T_E}\right] = H\left[z = e^{j.\Omega}\right]} \quad \text{avec } \Omega = \omega.T_E = 2.\pi.\frac{f}{F_E}$$

Remarque : on passe de la transformée en Z à la transformée de Laplace par $z = e^{p.T_E}$, et de la fonction de transfert T(p) à la fonction de transfert en régime harmonique par $p = j.\omega$:

$$\left.\begin{array}{r} z = e^{p.T_E} \\ p = j.\omega \end{array}\right\} \Rightarrow z = e^{j.\omega.T_E}$$

-6- Exemple

Etude en régime harmonique du filtre défini par la récurrence :

$$y(n) - \frac{1}{2}.y(n-1) = \frac{1}{2}.x(n)$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}.z^{-1}} \Rightarrow H(j.\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}.\left(e^{j.\Omega}\right)^{-1}} \qquad (\text{où } \Omega = \omega.T_E)$$

Remarque : $H(j.\omega)$ est périodique, de période ω_E. On peut donc restreindre l'étude à $\omega \in \left[-\frac{\omega_E}{2} ; \frac{\omega_E}{2}\right]$, ce que nous avons supposé dès le début pour respecter le théorème de **Shannon**.

$$H(j.\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}.\left(e^{j.\Omega}\right)^{-1}} = \frac{1}{2 - \cos\Omega + j.\sin\Omega}$$

<u>Etude de |H|</u> : $$|H|^2 = \frac{1}{(2 - \cos\Omega)^2 + (\sin\Omega)^2} = \frac{1}{5 - 4.\cos\Omega}$$

Ω variant de 0 à π (soit ω variant de 0 à $\omega_E/2$) cos Ω décroît de + 1 à - 1.

$|H|^2$ décroît de 1 à $\frac{1}{9}$ (donc $|H|$ décroît de 1 à $\frac{1}{3}$)

<u>Fréquence de coupure à - 3 dB</u> : $5 - 4.\cos\Omega_C = 2 \Rightarrow \Omega_C = \arccos\frac{3}{4}$ soit $\omega_C \approx 0{,}12.\omega_E$

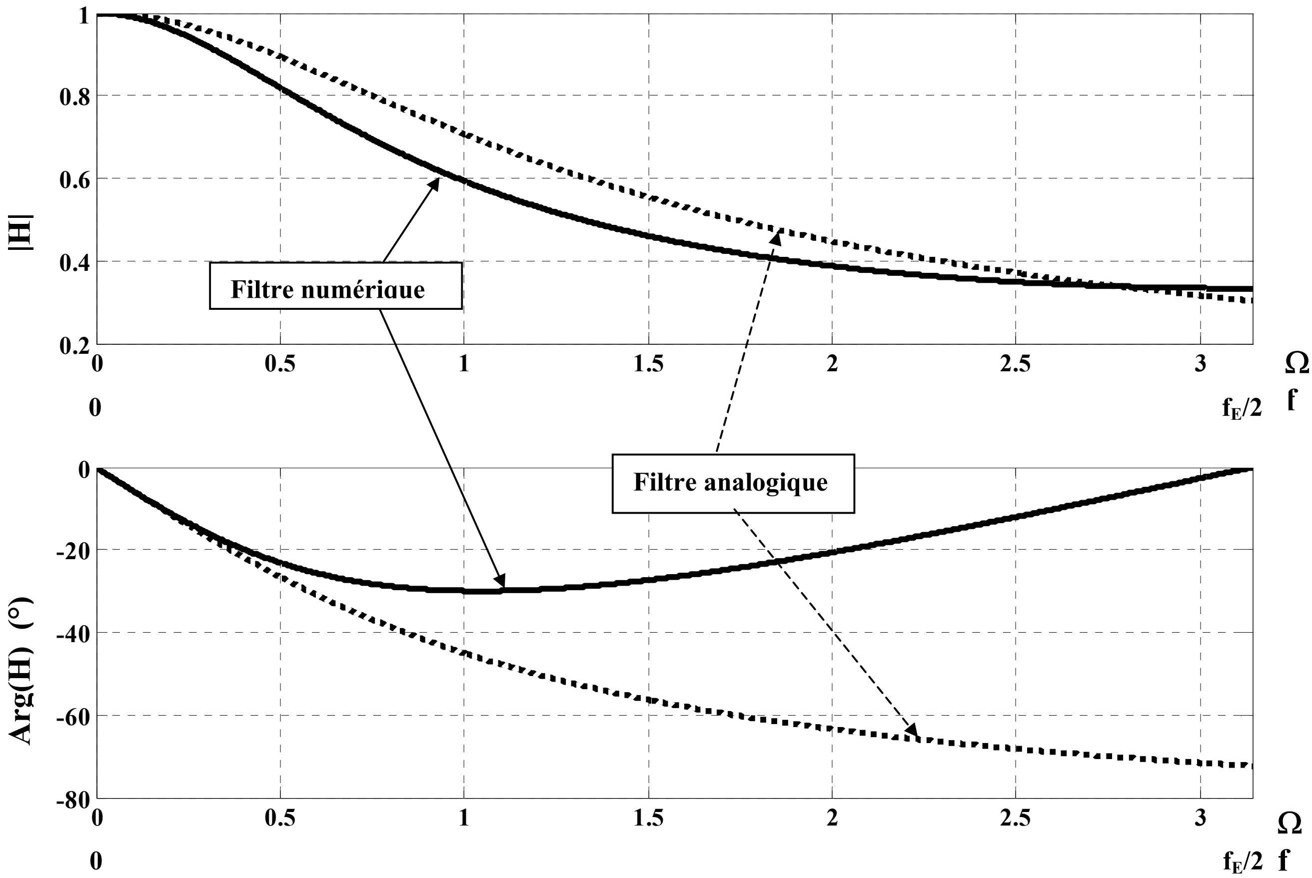
(Le filtre analogique ayant servi de modèle était un filtre du premier ordre tel que $\tau = T_E$, soit $\omega_C = \frac{\omega_E}{2.\pi} \approx 0{,}16.\omega_E$)

<u>Etude de Arg(H)</u> : Soit $\varphi = \text{Arg}[H] : \tan\varphi = -\frac{\sin\Omega}{2 - \cos\Omega}$

$$\frac{d\tan\varphi}{d\Omega} = \left(1 + \tan^2\varphi\right).\frac{d\varphi}{d\Omega} = -\frac{\cos\Omega.(2 - \cos\Omega) - \sin^2\Omega}{(2 - \cos\Omega)^2} = -\frac{2.\cos\Omega - 1}{(2 - \cos\Omega)^2}$$

D'où le tableau de variations :

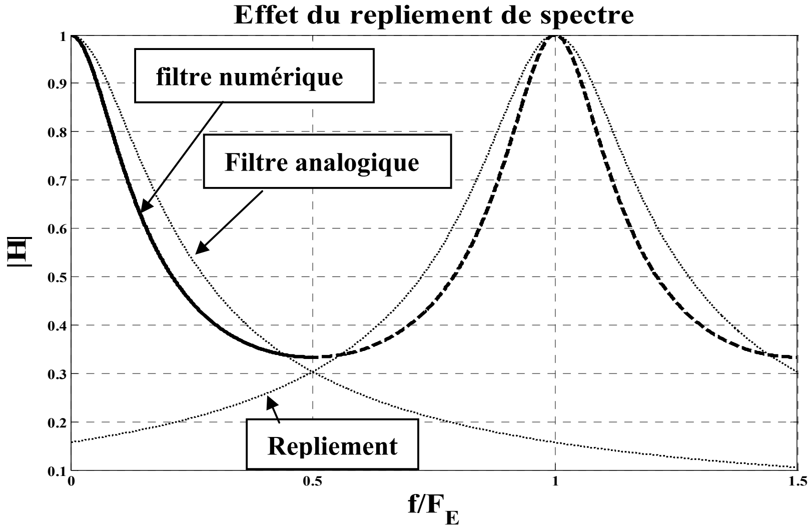
Ω	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\frac{d\varphi}{d\Omega}$		$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	0



Remarque : La récurrence a été obtenue en simulant sous forme numérique un filtre du premier ordre défini par l'équation $y + \tau.\dfrac{dy}{dt} = x$ avec $\tau = T_E$, et en faisant l'approximation $\dfrac{dy}{dt} \approx \dfrac{y(n) - y(n-1)}{T_E}$.

On constate que les deux filtres (numérique et analogique) ont un comportement différent en régime harmonique (en particulier pour l'argument). Dans notre approximation, nous avons totalement ignoré l'échantillonnage et les **effets de repliement de spectre.**

Effet du repliement de spectre



<u>note</u> : la somme est une somme de nombres complexes :

$$H(j.\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + j.\tau.(\omega - k.\omega_E)}$$

Annexe 1 : parallèle filtres analogiques - filtres numériques

	ANALOGIQUE	NUMERIQUE
Définition	Linéarité $\left.\begin{array}{l} x_1(t) \xrightarrow{\text{Réponse}} y_1(t) \\ x_2(t) \xrightarrow{\text{Réponse}} y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow a.x_1(t)+b.x_2(t) \xrightarrow{\text{Réponse}} a.y_1(t)+b.y_2(t)$ Invariance $x(t) \xrightarrow{\text{Réponse}} y(t) \Rightarrow x(t-\tau) \xrightarrow{\text{Réponse}} y(t-\tau) \quad \forall \tau$	Linéarité $\left.\begin{array}{l} x_1(n) \xrightarrow{\text{Réponse}} y_1(n) \\ x_2(n) \xrightarrow{\text{Réponse}} y_2(n) \end{array}\right\} \Rightarrow a.x_1(n)+b.x_2(n) \xrightarrow{\text{Réponse}} a.y_1(n)+b.y_2(n)$ Invariance $x(n) \xrightarrow{\text{Réponse}} y(n) \Rightarrow x(n-k) \xrightarrow{\text{Réponse}} y(n-k) \quad \forall k$
Equation	Différentielle $y(t)+\sum_{k=1}^{n} b_k.\frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell.\frac{d^\ell x}{dt^\ell}$	Récurrence $y(n)+\sum_{k=1}^{P} b_k.y(n-k) = \sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell.x(n-\ell)$
Convolution	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).\delta(t-\theta).d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\theta).\delta(\theta).d\theta$	$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k).\delta(k)$
Réponse impulsionnelle	$\delta(t) \xrightarrow{\text{Réponse}} g(t)$ $x(t) \xrightarrow{\text{Réponse}} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).g(t-\theta).d\theta$	$\delta(n) \xrightarrow{\text{Réponse}} h(n)$ $x(n) \xrightarrow{\text{Réponse}} y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k)$
Réponse harmonique	$T(j.\omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{m} a_\ell.(j.\omega)^\ell}{1+\sum_{k=1}^{n} b_k.(j.\omega)^k}$	$H(j.\omega) = \frac{\sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell.\left(e^{j.\omega.T_E}\right)^{-\ell}}{1+\sum_{k=1}^{P} b_k.\left(e^{j.\omega.T_E}\right)^{-k}}$

Annexe 2 : parallèle transformée de Laplace - transformée en Z

LAPLACE | **TRANSFORMEE EN Z**

DEFINITION

$$X(p) = \lim_{T_E \to 0} T_E.X\left[z = e^{T_E.p}\right]$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(p) = \int_0^{+\infty} x(t).e^{-p.t}.dt$$

$$x(n) \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

Echantillonnage

$x_e(t)$

$$X_e(p) = T_E.\sum_{n=0}^{+\infty} x(n.T_E).\left[e^{T_E.p}\right]^{-n}$$

$z = e^{T_E.p}$

PROPRIETES

Linéarité

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \leftrightarrow X(p) \\ y(t) \leftrightarrow Y(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x(t)+y(t) \leftrightarrow X(p)+Y(p) \\ a.x(t) \leftrightarrow a.X(p) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x(n) \leftrightarrow X(z) \\ y(n) \leftrightarrow Y(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x(n)+y(n) \leftrightarrow X(z)+Y(z) \\ a.x(n) \leftrightarrow a.X(z) \end{array}\right.$$

Retard

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-t_0.p}.X(p)$$

$$t_0 = k.T_E \text{ et } z = e^{T_E.p} \quad \Rightarrow e^{-t_0.p} = z^{-k}$$

$$x(n-k) \leftrightarrow z^{-k}.X(z)$$

Changement d'échelle

$$x(t).e^{p_0.t} \leftrightarrow X(p-p_0)$$

$$z' = e^{(p-p_0).T_E} = \frac{e^{p.T_E}}{e^{p_0.T_E}}$$

$$\text{soit } z' = \frac{z}{z_0} \text{ avec } z_0 = e^{p_0.T_E}$$

$$z_0^{\,n}.x(n) \leftrightarrow X\left[\frac{z}{z_0}\right]$$

Transformée de n.x(n)

$$t.x(t) \leftrightarrow -\frac{dX}{dp}$$

$$t.x(t) \xrightarrow{\text{Echant.}} T_E.n.x(n)$$

$$-\frac{dX}{dp} = -\frac{dX}{dz}.\frac{dz}{dp} = -\frac{dX}{dz}.\frac{d\left(e^{T_E.p}\right)}{dp} = -T_E.z.\frac{dX}{dz}$$

$$n.x(n) \leftrightarrow -z.\frac{dX}{dz} = z^{-1}.\frac{dX}{dz^{-1}}$$

Théorème de la valeur initiale

$$x(0^+) = \lim_{p \to \infty} p.X(p) \quad \longrightarrow \quad \boxed{p \to \infty \ \Rightarrow \ z = e^{T_e \cdot p} \to \infty} \quad \longrightarrow \quad x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z^{-1} \to 0} X(z)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{p \to 0} p.X(p) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} z = e^{T_E \cdot p} \approx 1 + T_E.p \ \ \text{qd} \ \ p \to 0 \\ \Rightarrow \ p \approx \dfrac{z-1}{T_E} \end{array}} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \lim_{n \to \infty} x(n) &= \lim_{z \to 1} (z-1).X(z) \\ &= \lim_{z^{-1} \to 1} \left(1 - z^{-1}\right).X(z) \end{aligned}$$

APPLICATION A L'ETUDE DES FILTRES

Equation différentielle ⟶ **Equation de récurrence**

$$y + \sum_{k=1}^{n} b_k . \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell . \frac{d^\ell x}{dt^\ell} \qquad\qquad y(n) + \sum_{k=1}^{P} b_k . y(n-k) = \sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell . x(n-\ell)$$

Fonction de transfert

$$\left[\frac{d}{dt}\right]^k \leftrightarrow p^k \times \quad \longrightarrow \quad \left(n-k\right) \leftrightarrow z^{-k} \times$$

$$T(p) = \frac{\sum_{\ell=0}^{m} a_\ell . p^\ell}{1 + \sum_{k=1}^{n} b_k . p^k} \quad \longrightarrow \quad H(z) = \frac{\sum_{\ell=0}^{Q} a_\ell . z^{-\ell}}{1 + \sum_{k=1}^{P} b_k . z^{-k}}$$

Réponse impulsionnelle

T(p) est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle

H(z) est la transformée en Z de la réponse impulsionnelle

$$T(p) = \mathscr{L}\left[g(t)\right] \quad \longrightarrow \quad H(z) = \mathcal{Z}\left[h(n)\right]$$

Réponse harmonique

$$T(j.\omega) = T\left[p = j.\omega\right] \quad \longrightarrow \quad \boxed{\left.\begin{array}{l} z = e^{T_E \cdot p} \\ p = j.\omega \end{array}\right\} \Rightarrow z = e^{j.\omega.T_E}} \quad \longrightarrow \quad H(j.\omega) = H\left[z = e^{j.\omega.T_E}\right]$$