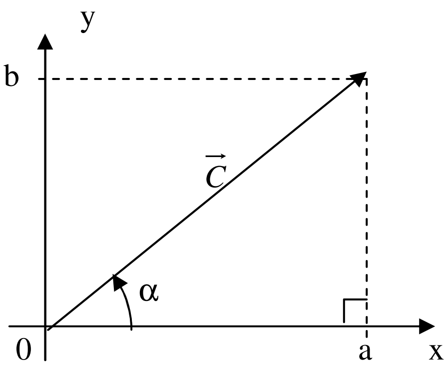
La notion de grandeur complexe. Somme de complexes. Produit et rapport de complexes.

1 Rappels de cours sur la notion de grandeur complexes.



Soit un complexe $\underline{C}$ ([1]) dont l'image est le vecteur $\vec{C}$ ci-contre. Ce complexe (ou ce vecteur) décrit simultanément deux informations : la « longueur ρ » du vecteur (on dit le « module » du vecteur) et sa position angulaire (définie par l'angle α).
On peut également décrire le même complexe (ou le même vecteur) en indiquant les valeurs « a » et « b ».

Vocabulaire :
- la longueur « ρ » du vecteur est appelée « **module** » du complexe.
- L'angle « α » est appelé « **argument** » du complexe.
- La valeur de l'abscisse « a » est appelée « **partie réelle** » du complexe.
- La valeur de l'ordonnée « b » est appelée « **partie imaginaire** » du complexe.

Convention : Il a été décidé d'écrire les informations décrites par le vecteur (ou le complexe) sous une forme particulière (de façon que tout le monde comprenne la même chose).

- Si le complexe est décrit avec les informations « ρ » et « α » : on écrit $\underline{C} = \rho . e^{j\alpha}$ (on dit que c'est l'écriture « **exponentielle** »
- Si le complexe est décrit avec les information « a » et « b » : on écrit : $\underline{C} = a + j.b$ (on dit que c'est l'écriture **algébrique**).

Relations :

- En utilisant le théorème de Pythagore, on voit que $\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$
- En utilisant la définition de la tangente : tangente $= \dfrac{\text{coté } opposé}{\text{coté } adjacent}$, on en déduit $tg(\alpha) = \dfrac{b}{a}$ et donc

$$\boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}$$

- En utilisant la définition : cosinus $= \dfrac{\text{coté } adjacent}{hypoténuse}$, on en déduit $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{\rho} \Leftrightarrow \boxed{a = \rho.\cos(\alpha)}$
- En utilisant la définition : sinus $= \dfrac{\text{coté } opposé}{hypoténuse}$, on en déduit $\sin(\alpha) = \dfrac{b}{\rho} \Leftrightarrow \boxed{b = \rho.\sin(\alpha)}$

On peut donc transformer une expression complexe de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement .

---

(1) Pour repérer les grandeurs complexes, on les écrit en majuscule avec un trait dessous (Cette écriture est normalisée)

Exemple :

- $\underline{C} = 1 + 2j$: on peut aussi l'écrire $\underline{C} = \sqrt{5}.e^{j1,107}$ car $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 1,107\ rad$ ou $\text{atan}\left(\frac{2}{1}\right) = 1,107\ rad$ (on le calcule avec une calculette).
- Et réciproquement, le complexe $\underline{C} = \sqrt{5}.e^{j1,107}$ peut aussi s'écrire $\underline{C} = 1 + 2j$ car $\sqrt{5}.\cos(1,107) = 1$ et $\sqrt{5}.\sin(1,107) = 2$ (à la calculette également).

2 Somme de deux complexes :

La somme de deux grandeurs complexes se définit de la façon suivante :

Soit deux grandeurs complexes écrites sous forme algébrique : $\underline{V1} = a_1 + j.b_1$ et $\underline{V2} = a_2 + j.b_2$.

La somme de ces deux grandeurs complexes est par définition
$\underline{V} = \underline{V1} + \underline{V2} = a_1 + j.b_1 + a_2 + j.b_2 = (a_1 + a_2) + j.(b_1 + b_2)$

La partie réelle de la somme est la somme des parties réelles et la partie imaginaire de la somme est la somme des parties imaginaires.
Pour calculer une somme de complexes « à la main », il faut tout d'abord écrire ces complexes sous forme ***algébrique****.*

Exemple : faire la somme de $\underline{V1} = 3.e^{j0,8}$ et de $\underline{V2} = 5.e^{-j0,4}$

3 Différence de deux complexes :

La différence de deux grandeurs complexes se définit de la façon suivante :

Soit deux grandeurs complexes écrites sous forme cartésienne : $\underline{V1} = a_1 + j.b_1$ et $\underline{V2} = a_2 + j.b_2$.

La différence de ces deux grandeurs complexes est par définition
$\underline{V'} = \underline{V1} - \underline{V2} = (a_1 + j.b_1) - (a_2 + j.b_2) = (a_1 - a_2) + j.(b_1 - b_2)$

La partie réelle de la différence est la différence des parties réelles et la partie imaginaire de la différence est la différence des parties imaginaires.
Pour calculer une différence *de complexes « à la main », il faut tout d'abord écrire ces complexes sous forme* ***algébrique****.*

Exemple : faire la différence de $\underline{V1} = 3.e^{j0,8}$ et de $\underline{V2} = 5.e^{-j0,4}$

4 Produit de deux complexes :

Le produit de deux grandeurs complexes se définit de la façon suivante :

Soit deux grandeurs complexes écrites sous forme exponentielle : $\underline{V1} = \rho_1.e^{j.\theta 1}$ et $\underline{V2} = \rho_2.e^{j.\theta 2}$
Le produit de ces deux grandeurs complexes est par définition
$P = \underline{V1}.\underline{V2} = \rho_1.e^{j.\theta 1}.\rho_2.e^{j.\theta 2} = \rho_1.\rho_2..e^{j.(\theta 1 + \theta 2)}$

Le module du produit est le produit des modules et l'argument du produit est la somme des arguments (l'argument est défini à $2k\pi$ près : on peut l'écrire $\theta 1 + \theta 2$ ou $\theta 1 + \theta 2 + 2\pi$ ou $\theta 1 + \theta 2 - 2\pi$ ou …).
*Pour calculer un produit de complexes « à la main », il faut tout d'abord écrire ces complexes sous forme **exponentielle**.*

Exemple : faire le produit de $\underline{V1} = 3.e^{j0,8}$ et de $\underline{V2} = 5.e^{-j0,4}$

5 Rapport de deux complexes :

Le rapport de deux grandeurs complexes se définit de la façon suivante :

Soit deux grandeurs complexes écrites sous forme exponentielle : $\underline{V1} = \rho_1.e^{j.\theta 1}$ et $\underline{V2} = \rho_2.e^{j.\theta 2}$
Le rapport de ces deux grandeurs complexes est par définition $R = \dfrac{\underline{V1}}{\underline{V2}} = \dfrac{\rho_1.e^{j.\theta 1}}{\rho_2.e^{j.\theta 2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}..e^{j.(\theta 1 - \theta 2)}$

Le module du rapport est le rapport des modules et l'argument du rapport est la différence des arguments (l'argument est défini à $2k\pi$ près : on peut l'écrire $\theta 1 + \theta 2$ ou $\theta 1 + \theta 2 + 2\pi$ ou $\theta 1 + \theta 2 - 2\pi$ ou …).
Pour calculer un rapport *de complexes « à la main », il faut tout d'abord écrire ces complexes sous forme **exponentielle**.*

Exemple : faire le rapport de $\underline{V1} = 10.e^{j0,8}$ et de $\underline{V2} = 5.e^{-j0,4}$

6 Pour faire un calcul en complexe avec Scilab ([2]):

Pour écrire l'opérateur complexe "j", il faut utiliser "%i" (en mathématique on utilise souvent la lettre "i" à la place de la lettre "j" dans l'écriture ci-dessus). Ecriture Scilab pour un complexe v :

real(v): calcule la partie réelle de v
imag(v): calcule la partie imaginaire de v
abs(v): calcule le module de v
atan(imag(v),real(v)): calcule l'argument de v

([2]) Le logiciel « Scilab » est un logiciel gratuit téléchargeable sur internet

Exemple N°1:

$\underline{V_1} = 3.e^{j\frac{\pi}{6}}$.

Saisir l'instruction suivante dans Scilab:

```
v1=3*exp(%i*%pi/6)
```

La valeur complexe « $\underline{V1}$ » est automatiquement convertie dans sa forme algébrique

Saisir les instructions suivantes dans Scilab:

```
abs(v1)
atan(imag(v1),real(v1))
```

On retrouve le module et l'argument de « $\underline{V1}$ ».
Avec le logiciel Scilab, on peut faire des opérations sur des grandeurs complexes décrites aussi bien sous la forme algébriques qu'exponentielle. *Scilab se débrouille !*

Exemple N°2:

Exemple : faire la somme de $\underline{V1} = 3.e^{j0,8}$ et de $\underline{V2} = 5.e^{-j0,4}$

```
v1=3*exp(%i*0.8)
v2=5*exp(-%i*0.4)
v=v1+v2
abs(v)
atan(imag(v),real(v))
```

Ouvrir l'éditeur « Scipad » en cliquant sur l'icône « éditeur » dans le bandeau supérieur de Scilab.

Saisir les instructions ci-contre, puis « Exécuter/charger dans Scilab ».
Comparer le résultat obtenu avec celui qui a été trouvé « à la main » précédemment .

Si on veut éviter d'afficher les formes algébriques de $\underline{V1}$ et de $\underline{V2}$, il faut utiliser des « ; » à la fin:

Exemple N°3:

Exemple : faire la différence de $\underline{V1} = 3.e^{j0,8}$ et de $\underline{V2} = 5.e^{-j0,4}$

```
v1=3*exp(%i*0.8) ;
v2=5*exp(-%i*0.4) ;
v=v1-v2
abs(v)
atan(imag(v),real(v))
```

Comparer le résultat obtenu avec celui qui a été trouvé « à la main » précédemment .

Exemple N°4:

Pour faire le produit de $\underline{V1}$ et de $\underline{V2}$

```
v1=3*exp(%i*0.8) ;
v2=5*exp(-%i*0.4) ;
v=v1*v2
abs(v)
atan(imag(v),real(v))
```

Comparer le résultat obtenu avec celui qui a été trouvé « à la main » précédemment .

Exemple N°5:

Pour faire le rapport de $\underline{V1}$ et de $\underline{V2}$

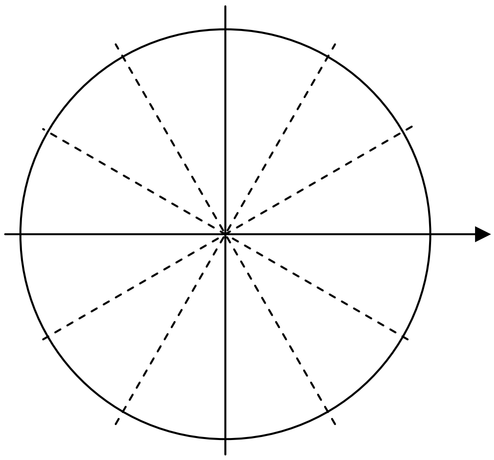
```
v1=10*exp(%i*0.8) ;
v2=5*exp(-%i*0.4) ;
v=v1/v2
abs(v)
atan(imag(v),real(v))
```

Comparer le résultat obtenu avec celui qui a été trouvé « à la main » précédemment .

7 Exercice

- Repérage de quelques angles particuliers exprimés en radian :

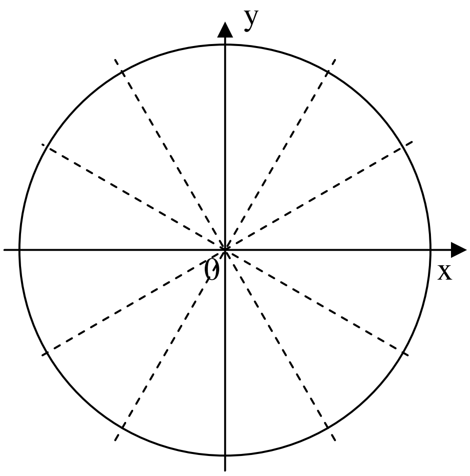
L'objectif est de reconnaître des angles exprimés en radians autrement que sous la forme $\frac{\pi}{n}$



En prenant pour origine des angles l'axe fléché sur le cercle ci-contre, repérer **approximativement** sur ce même cercle les angles de valeurs :

3,14 rad
1,5 rad
1 rad
0,8 rad
0,5 rad
- 1 rad
2 rad

➢ Représentation des vecteurs associés à quelques complexes remarquables



Ecrire en notation exponentielle puis repérer sur le cercle trigonométrique ci-contre l'image des complexes suivants:

* $1+0.j$ qu'on note simplement : 1

* $0+1.j$ qu'on note simplement : j

* $-1+0.j$ qu'on note simplement : -1

* $0+(-1).j=0-1.j$ qu'on note simplement : - j

* $(0+1.j).(0+1.j)$ qu'on note simplement $(j).(j)$ ou j^2

* $\dfrac{1}{0+1.j}$ qu'on note simplement $\dfrac{1}{j}$

* $1+j$

➢ Faire la somme $3+2.e^{j\frac{\pi}{3}}+2.e^{-j\frac{\pi}{3}}$ en utilisant Scilab avec les instructions :

```
j=%i;
pi=%pi;
s=3+2*exp(j*pi/3)+2*exp(j*(-pi/3))
abs(s)
atan(imag(s),real(s))
```

Vérifier ce résultat en représentant (à la main) les vecteurs associés à chacun des termes de la somme

➢ Faire la somme $2+2.e^{j\frac{\pi}{6}}+2.e^{j\frac{\pi}{3}}+2.j$ en utilisant Scilab avec les instructions :

```
j=%i;
pi=%pi;
s=2+2*exp(j*pi/6)+2*exp(j*pi/3)+2*j
abs(s)
atan(imag(s),real(s))/pi
```

Vérifier ce résultat en représentant (à la main) les vecteurs associés à chacun des termes de la somme