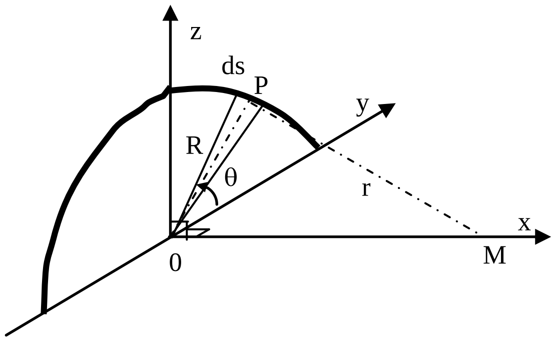
CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UN DEMI-ANNEAU CIRCULAIRE



On appelle θ l'angle que forment (OP, Oy)

Soit un arc de cercle centré sur P de longueur ds vu sous un angle $d\theta$.
La longueur de cet arc de cercle vaut : $ds = R.d\theta$.

Cet arc de cercle contient la charge élémentaire $dq = \lambda.ds = \lambda.R.d\theta$ avec λ densité de charge linéique du demi-anneau.

Cette charge élémentaire dq considérée comme ponctuelle crée en M le champ élémentaire : $d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^2}\vec{u}_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}\overrightarrow{PM}$

Les coordonnées du point M : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ du point P : $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} 0 \\ R.\cos\theta \\ R.\sin\theta \end{pmatrix}$ du vecteur $\overrightarrow{PM}$: $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x_M - x_P = x \\ y_M - y_P = -R.\cos\theta \\ z_M - z_P = -R.\sin\theta \end{pmatrix}$

Les coordonnées du vecteur champ élémentaire : $\overrightarrow{dE}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}(PM)_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}x \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}(PM)_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}(-R.\cos\theta) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}(PM)_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}(-R.\sin\theta) \end{pmatrix}$

Le champ électrique créé en M est la somme des champ élémentaires créés par chaque arc de cercle constituant le demi-anneau circulaire : $\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}$

$$\vec{E}\begin{pmatrix} \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}x \\ \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}(-R.\cos\theta) \\ \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R.d\theta}{r^3}(-R.\sin\theta) \end{pmatrix}$$

Lorsque θ varie (de 0 à π), R, r et x restent constants : on peut les « sortir » du signe somme.

$$\vec{E}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R}{r^3}x\int_0^\pi d\theta \\ -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R^2}{r^3}\int_0^\pi \cos\theta.d\theta \\ -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R^2}{r^3}\int_0^\pi \sin\theta.d\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{E}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R}{r^3}x.[\theta]_0^\pi \\ -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R^2}{r^3}[\sin\theta]_0^\pi \\ -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R^2}{r^3}[-\cos\theta]_0^\pi \end{pmatrix} \qquad \vec{E}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R}{r^3}x \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda.R^2}{r^3} \end{pmatrix}$$

On peut encore remplacer r^3 par $\left(\sqrt{R^2 + x^2}\right)^3 = \left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}$

Pour trouver l'expression du champ électrique en O, on remplace x par 0. $\vec{E}_{(\text{en O})}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda}{R} \end{pmatrix}$