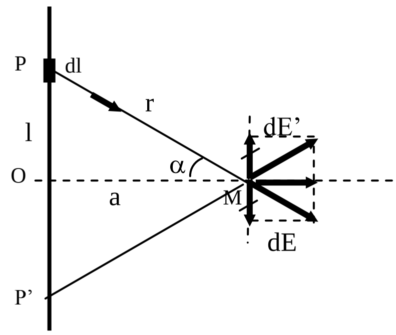
CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UN FIL INFINIMENT LONG.



Soit un fil infiniment long de densité linéique $\lambda = \frac{dq}{d\ell} > 0$

Soit un point P à la distance ℓ de O. On isole un segment dℓ centré sur P. (cf schéma ci-contre). La charge électrique contenue dans dℓ est $dq = \lambda . d\ell$.

Cette charge électrique élémentaire, considérée comme ponctuelle, crée en M à la distance r de P un champ électrique qui s'écrit :

$d\vec{E}_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda . d\ell}{r^2}\vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r$ vecteur unitaire orienté de la source du champ (P) vers le point M. (cf schéma)

Pour tout P, il existe un point P' symétrique du point P par rapport à O. On note dE'_M, le champ électrique créé par P' en M. On s'aperçoit alors que les composantes des champs parallèles au fil s'annulent deux à deux. La direction du champ résultant est donc dirigée selon OM direction normale au fil.

Le champ électrique résultant sera donc la somme de l'ensemble des composantes normales au fil des champs élémentaires créés par l'ensemble des segments constituant le fil.

$$E_M = \int dE_M . \cos\alpha = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda . d\ell}{r^2}\cos\alpha \qquad (1)$$

On choisit comme variable d'intégration α plutôt que ℓ.

$$\tan\alpha = \frac{\ell}{a} \Rightarrow \ell = a.\tan\alpha \Rightarrow \frac{d\ell}{d\alpha} = a.\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow d\ell = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\alpha}$$

On remplace dans (1) les expressions précédentes de dℓ et r : on obtient pour l'expression du champ au point M

$$E_M = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda . \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha}{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}}\cos\alpha = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\cos\alpha . d\alpha$$

On « sort » les termes constants du signe somme : $E_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\int \cos\alpha . d\alpha$

On somme les segments élémentaires qui constitue le fil en faisant varier α de $-\pi/2$ à $+\pi/2$.

$$E_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\alpha . d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}.[\sin\alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}.[1-(-1)] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 . a}$$

La direction du champ résultant est normale au fil et dépend de la densité linéique et de la distance au fil.