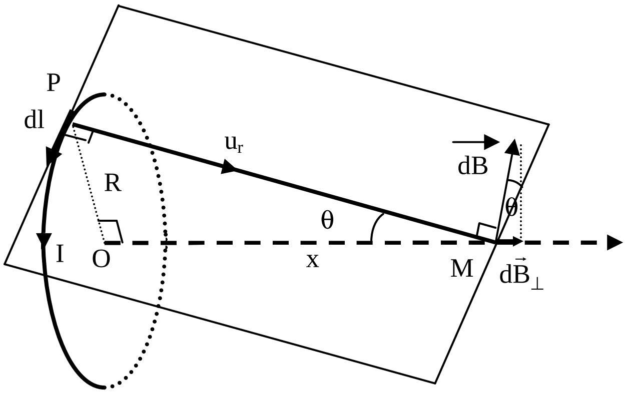
CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UNE SPIRE CIRCULAIRE DE RAYON R.

L'élément de courant $I.d\vec{l}$ crée un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$

Les caractéristiques du vecteur $d\vec{B}$ sont:
$$\begin{cases} \text{direction : } \perp \text{ à } I.d\vec{l} \text{ et } \vec{u}_r \\ \text{sens : règle des 3 doigts main droite} \\ \text{norme : } dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I.dl.\sin\left(I.d\vec{l},\vec{u}_r\right)}{r^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I.dl.\sin(\pi/2)}{r^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I.dl}{r^2} \end{cases}$$

Il existe pour chaque élément de courant $I.d\vec{l}$ son symétrique par rapport à O. Par conséquent, les composantes parallèles au plan de la spire s'annulent deux à deux. Le champ magnétique résultant aura donc une direction perpendiculaire au plan de la spire.



$$B = \int dB_\perp = \int dB.\sin\theta = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.dl}{r^2}\sin\theta$$

Lorsqu'on somme l'ensemble des segments dl qui constitue la spire, r et θ restent constant.

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I.dl}{r^2}\sin\theta\int dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\sin\theta.[2\pi R]$$

$$\left|\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{R}{r} \\ r^2 = x^2 + R^2 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2}R\frac{I}{r^2}\frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon R à la distance x de l'axe de la spire a pour expression :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

CHAMP MAGNETIQUE CREE AU CENTRE D'UN SOLENOÏDE

Soit un solénoïde (bobine) de longueur L constitué de N spires et parcouru par un courant d'intensité I.

Soit un élément de ce solénoïde de largeur dx situé à la distance x du centre O du solénoïde.

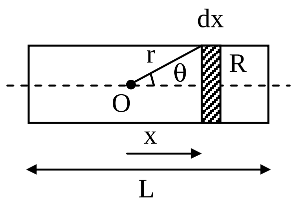
Cet élément renferme $\dfrac{N}{L}.dx$ spires

Le champ magnétique créé en O par cet élément dx correspond à $\dfrac{N}{L}.dx$ fois le champ créé par une spire.

$$dB_0 = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{N}{L}dx$$

le champ résultant est la somme des champs élémentaires créés par l'ensemble des éléments dx constituant le solénoïde.

$$B_0 = \int dB = \int \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{N}{L}dx = \frac{\mu_0 I}{2}R^2\frac{N}{L}\int\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$$



Choisissons θ comme variable d'intégration.

$$\tan\theta = \frac{R}{x} \Rightarrow x = \frac{R}{\tan\theta} = R\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = R.\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = R\left(\frac{-1}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \left(x^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R}{\sin\theta} \Rightarrow \left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{R^3}{\sin^3\theta}$$

D'où $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2} R^2 \frac{N}{L} \int \frac{1}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\mu_0 I}{2} R^2 \frac{N}{L} \int \frac{1}{\frac{R^3}{\sin^3\theta}} R\left(\frac{-1}{\sin^2\theta}\right) d\theta = -\frac{\mu_0.N.I}{2L} \int \sin\theta d\theta$

On fait varier θ de θ_1 à θ_2

$$B_0 = -\frac{\mu_0.N.I}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta = -\frac{\mu_0.N.I}{2L} \left[-\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = -\frac{\mu_0.N.I}{2L} \left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right] = \frac{\mu_0.N.I}{2L} \left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right]$$

Dans le cas d'un solénoïde infiniment long $\theta_1 = \pi$ et $\theta_2 = 0$

$\Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0.N.I}{2L}\left[1 - (-1)\right] = \frac{\mu_0.N.I}{L} = \mu_0.n.I$ avec $n = \frac{N}{L}$ nombre de spire par unité de longueur