ETAT QUELCONQUE DE CONTRAINTES

1. OBJECTIF

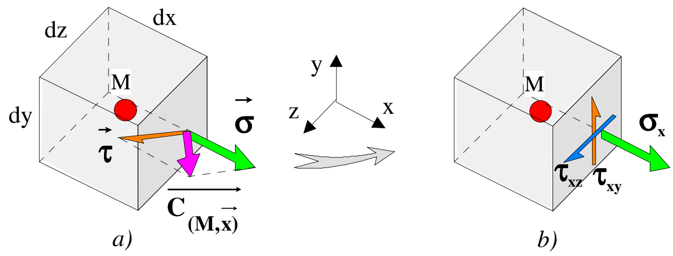
Il s'agit d'une sensibilisation à l'état quelconque de contraintes volontairement mis sous une forme très synthétique et sans aucune démonstration afin de permettre d'élaborer un modèle **éléments finis solides** d'une structure quelconque et d'en exploiter les résultats

2. DEFINITION DE L'ETAT QUELCONQUE DE CONTRAINTES

Volume élémentaire parallélépipédique entourant le point M isolé avec les normales aux facettes notées $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ distinctes des directions principales $\vec{1}$, $\vec{2}$, $\vec{3}$, alors sur chacune des facettes agit un vecteur contrainte caractérisé par une composante normale et une composante tangentielle.

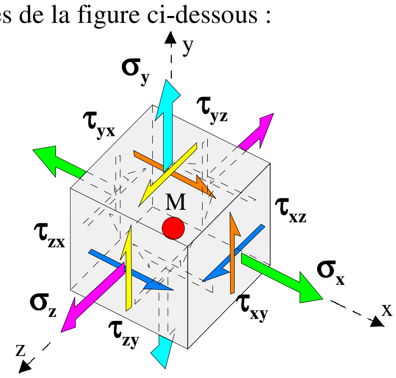
Sur la facette de normale $\vec{x}$ on a la contrainte $\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}}$ lorsqu'on la projette sur les trois axes, soit :

- contrainte normale suivant $\vec{x}$: σ_x
- contrainte tangentielle suivant $\vec{y}$: τ_{xy}
- contrainte tangentielle suivant $\vec{z}$: τ_{xz}

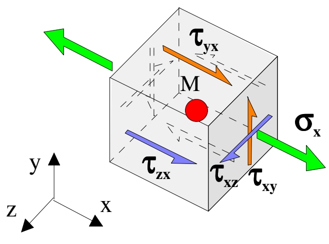


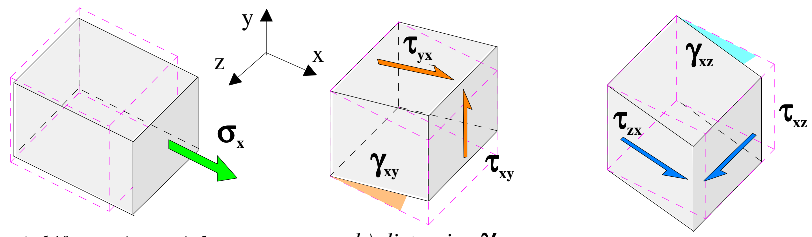
a) *b)*

En faisant de même pour les autres facettes du domaine, on obtient les composantes de la figure ci-dessous :
- trois contraintes normales : σ_x , σ_y , σ_z
- six contraintes tangentielles : τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy}



❐ Mise en évidence des déformations
- équilibre partiel du domaine





a) déformation axiale sous l'effet de σ_x *b) distorsion* γ_{xy} *sous l'effet de* τ_{xy} *c) distorsion* γ_{xz} *sous l'effet de* τ_{xz}

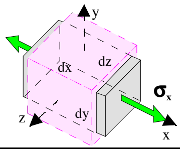
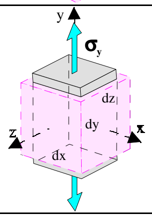
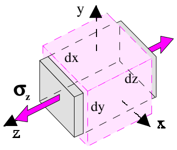
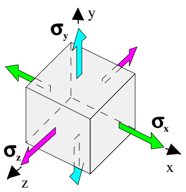
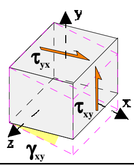
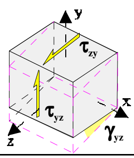
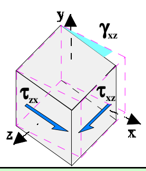
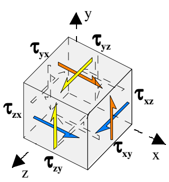
$$\varepsilon_x \leftrightarrow \sigma_x \ ; \ \gamma_{xy} \leftrightarrow \tau_{xy} \ ; \ \gamma_{xz} \leftrightarrow \tau_{xz}$$

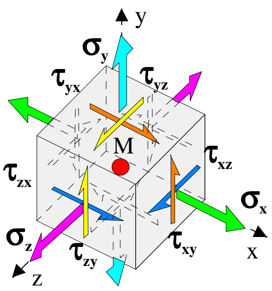
Pour les autres configurations d'équilibre, par analogie on aura aussi :

$$\varepsilon_y \leftrightarrow \sigma_y \ ; \ \gamma_{yx} \leftrightarrow \tau_{yx} \ ; \ \gamma_{yz} \leftrightarrow \tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z \leftrightarrow \sigma_z \ ; \ \gamma_{zx} \leftrightarrow \tau_{zx} \ ; \ \gamma_{zy} \leftrightarrow \tau_{zy}$$

❐ Relations de comportement

cas de chargement	ε_x	ε_y	ε_z
	$\varepsilon_{x1} = \frac{1}{E}\sigma_x$	$\varepsilon_{y1} = -\nu\times\varepsilon_{x1} = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$	$\varepsilon_{z1} = -\nu\times\varepsilon_{x1} = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$
	$\varepsilon_{x2} = -\nu\times\varepsilon_{y2} = -$	$\varepsilon_{y2} = \frac{1}{E}\sigma_y$	$\varepsilon_{z2} = -\nu\times\varepsilon_{y2} = -\frac{\nu}{E}\sigma_y$
	$\varepsilon_{x3} = -\nu\times\varepsilon_{z3} = -$	$\varepsilon_{y3} = -\nu\times\varepsilon_{z3} = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$	$\varepsilon_{z3} = \frac{1}{E}\sigma_z$
combinaison des trois chargements précédents	$\varepsilon_x = \varepsilon_{x1}+\varepsilon_{x2}+\varepsilon_{x}$ $= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}$	$\varepsilon_y = \varepsilon_{y1}+\varepsilon_{y2}+\varepsilon_{y3}$ $= -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z$	$\varepsilon_z = \varepsilon_{z1}+\varepsilon_{z2}+\varepsilon_{z3}$ $= -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z$
	$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E}\\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E}\\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E}\end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{Bmatrix}$		
cas de chargement	γ_{xy}	γ_{yz}	γ_{zx}
	$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$	0	0
	0	$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$	0
	0	0	$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$
combinaison des trois chargements précédents	$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$	$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$	$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$
	$\begin{Bmatrix}\gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{G} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix}\tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}$		

<table>
<tr><th>état quelconque de contraintes</th><th>relation de comportement déformations-contraintes</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

</td></tr>
<tr><th>relation de comportement contraintes-déformations</th></tr>
<tr><td>

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

</td></tr>
</table>

on rappelle que $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$