

ETAT PLAN DE CONTRAINTES

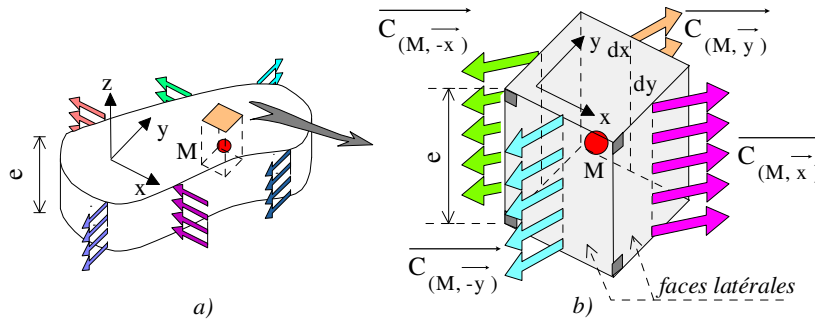
1. OBJECTIF

Il s'agit d'une sensibilisation à l'état plan de contraintes volontairement mis sous une forme très synthétique et sans aucune démonstration afin de permettre d'élaborer un modèle **éléments finis membranes** d'une structure plane sollicitée dans ce plan et d'en exploiter les résultats

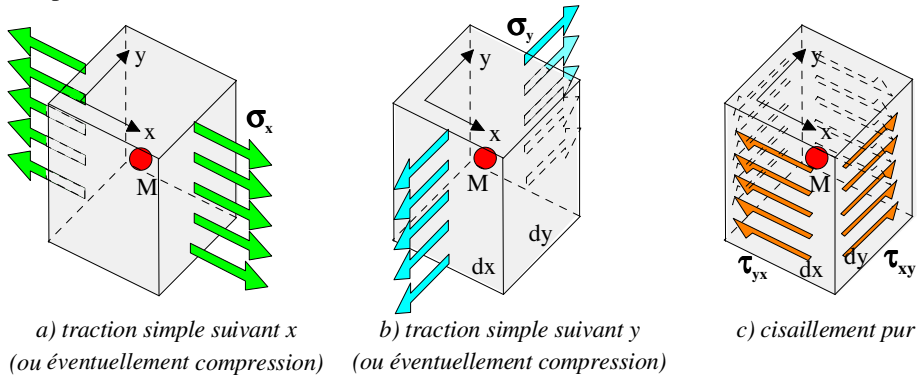
Un complément est fourni sur les représentations de Mohr (de nombreux utilitaires peuvent être utilisés) et de Lamé

2. DEFINITION DE L'ETAT PLAN DE CONTRAINTES

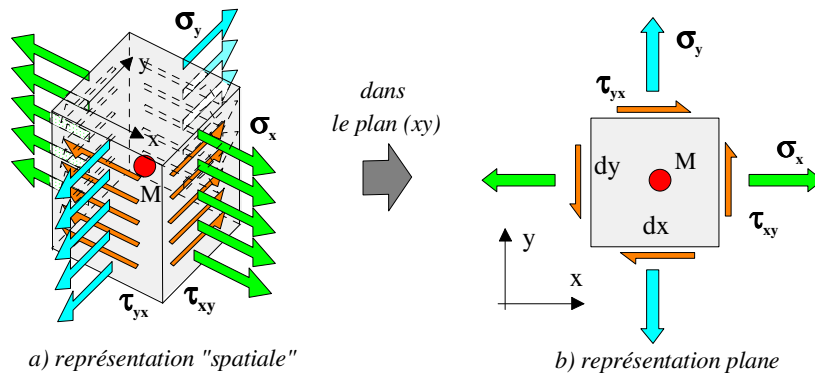
☐ Structure et chargement bidimensionnels :



☐ Composantes d'un état plan de contraintes :



☐ Etat plan de contraintes complet : superposition de ces trois états simples.



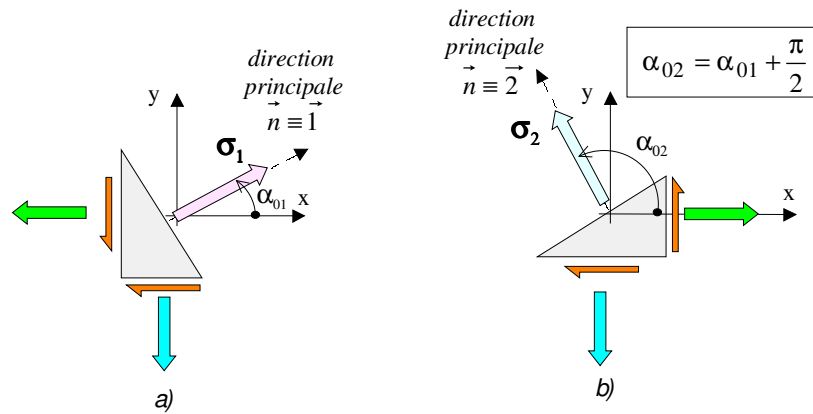
On peut rassembler les composantes caractéristiques de cet état plan de contraintes autour d'un point M dans une matrice

colonne $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$ ou sous la forme d'une matrice carrée et symétrique (appelé "tenseur des contraintes") $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$

Attention : les termes de cette matrice colonne ne sont pas les trois composantes d'un même vecteur contraint.

On rappelle en effet que $\vec{C}_{(M,x)} = \sigma_x \vec{x} + \tau_{xy} \vec{y}$ et $\vec{C}_{(M,y)} = \tau_{yx} \vec{x} + \sigma_y \vec{y}$

☐ Contraintes et directions principales ($\tau = 0$)



□ Relation entre l'état de **contraintes principales** connu en un point et les **composantes du vecteur contrainte** en ce même point pour une facette (\vec{t}, \vec{n}) de la section droite considérée. L'angle α donne l'orientation de normale (\vec{n}) de la facette par rapport à la direction principale (\vec{l}) .

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix}_{t,n} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ -cs & cs \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}_{1,2} \text{ avec } \begin{cases} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{cases}$$

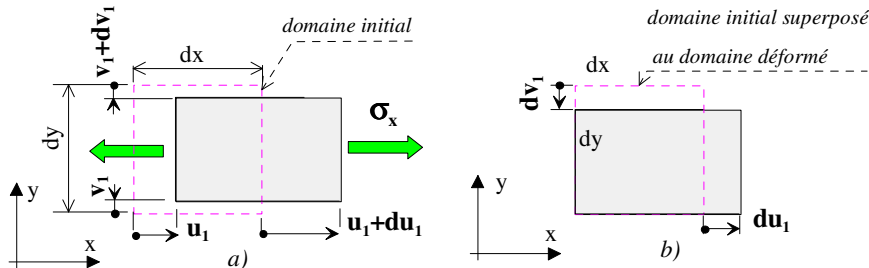
□ Relation entre l'état de **contraintes quelconque** connu en un point et les **contraintes principales** en ce même point

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

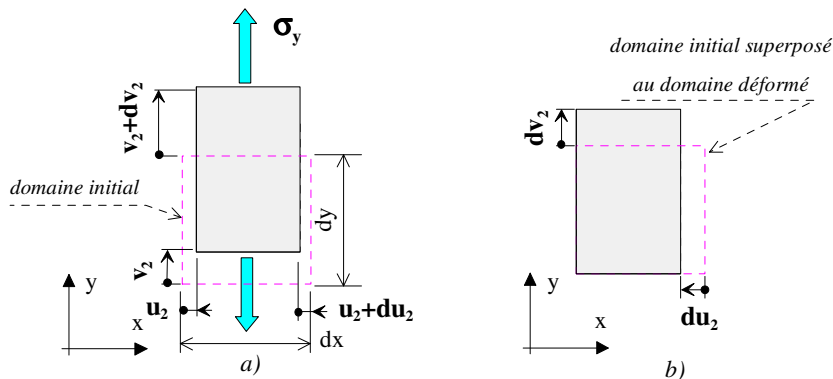
□ Relations de comportement en contraintes planes

Petit élément isolé et représenté dans le plan (xy) soumis à trois chargements successifs σ_x , puis σ_y , puis τ_{xy} ,
- traction simple suivant \vec{x}



On montre : allongement $\frac{du_1}{dx} = \epsilon_{x1} = \frac{1}{E} \sigma_x$ et contraction $\frac{dv_1}{dy} = \epsilon_{y1} = -\nu \times \epsilon_{x1} = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$

- traction simple suivant \vec{y}



On montre : allongement $\frac{dv_2}{dy} = \epsilon_{y2} = \frac{1}{E} \sigma_y$ et contraction $\frac{du_2}{dx} = \epsilon_{x2} = -\nu \times \epsilon_{y2} = -\frac{\nu}{E} \sigma_y$

- cisaillement pur

□ Relation entre l'état **quelconque de contraintes** connu en un point et les **composantes du vecteur contrainte** en ce même point pour une facette (\vec{t}, \vec{n}) de la section droite considérée. L'angle α donne l'orientation de normale (\vec{n}) de la facette par rapport à la direction (\vec{x}) .

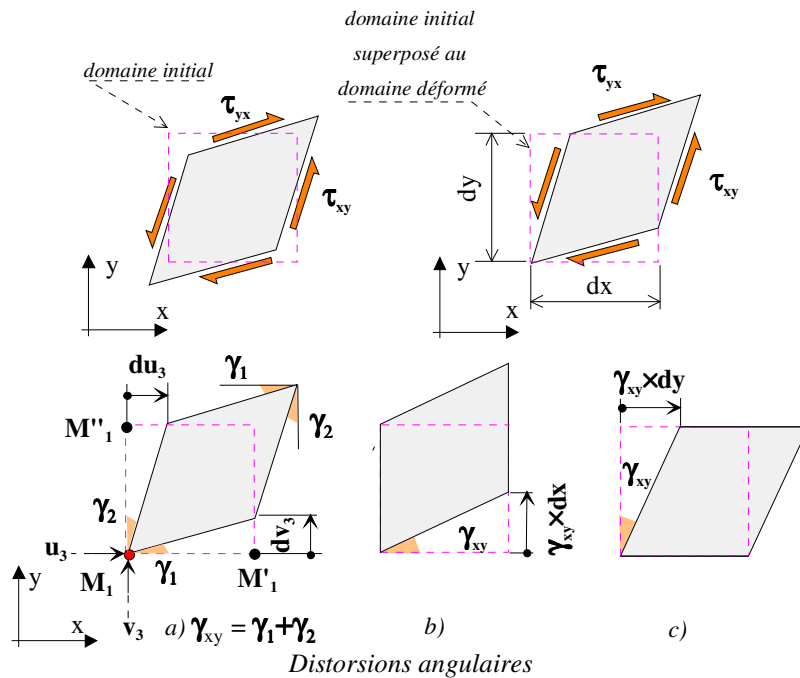
$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix}_{t,n} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{x,y} \text{ avec } \begin{cases} c = \cos \alpha \\ s = \sin \alpha \end{cases}$$

□ Détermination des angles des directions principales :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

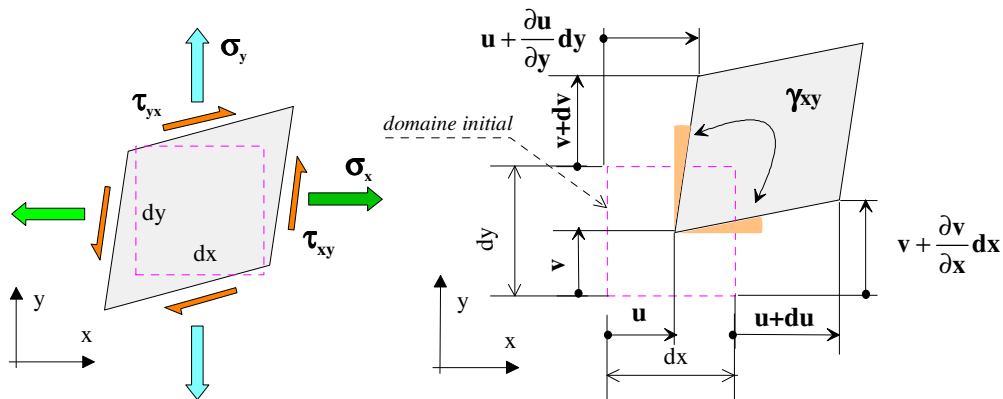
$$\alpha_{01} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\alpha_{02} = \alpha_{01} + \frac{\pi}{2}$$



On montre : $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \times \tau_{xy} \Leftrightarrow \tau_{xy} = G \times \gamma_{xy}$

- superposition des effets



On en déduit trois relations de comportement

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2} = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y ; \varepsilon_y = \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{y2} = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y ; \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Soit sous forme matricielle les relations de comportement s'écrivent :

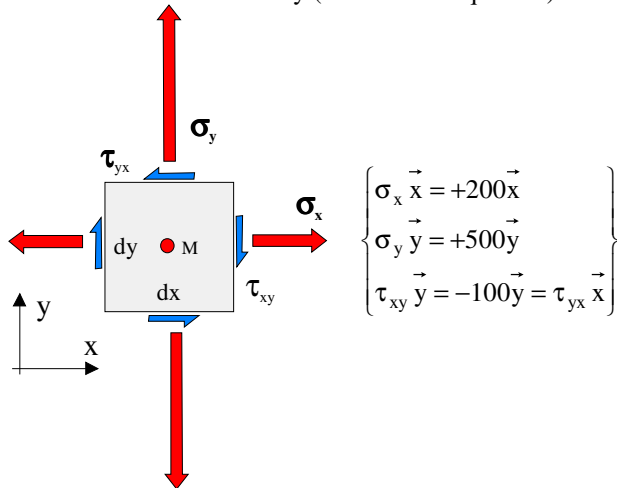
<i>déformations-contraintes</i>	<i>contraintes-déformations</i>
$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$

On montre aussi : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

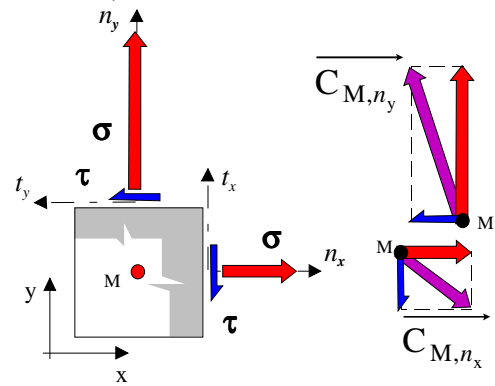
3. METHODOLOGIE DE LA CONSTRUCTION DU CERCLE DE MÖHR

• données

- état de contraintes autour du point M dans un repère local (xy) du domaine élémentaire dx×dy (domaine en équilibre)



- état de contraintes sur deux facettes perpendiculaires de normales n_x et n_y et vecteurs contraintes correspondants.

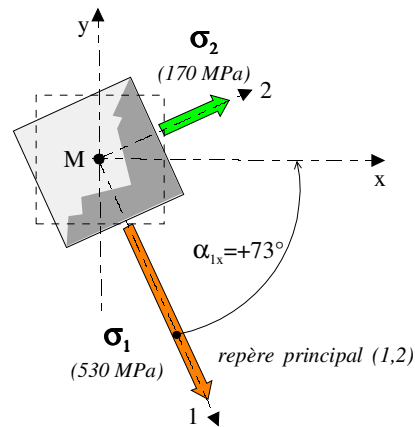
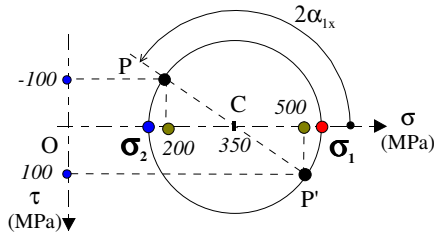


• construction du cercle de Mohr des contraintes : à partir de l'état plan de contraintes quelconque autour du point M connu, positionner le point P ($\sigma = +200$, $\tau = -100$) et A' ($\sigma = +500$, $\tau = +100$) dans le système d'axes $(\vec{\sigma}, \vec{\tau})$. Ces valeurs de contraintes sont celles exprimées dans les deux repères locaux (\vec{n}_x, \vec{t}_x) et (\vec{n}_y, \vec{t}_y) . Tracer un cercle de centre C et de rayon C

P (cercle de Mohr), ses 2 intersections avec l'axe $\vec{\sigma}$ donnent les 2 valeurs des contraintes principales σ_1 et σ_2 pour le point M (absences de contraintes tangentielles sur ces facettes). Les directions principales $\hat{1}$ et $\hat{2}$ portant ces deux contraintes principales sont identifiées angulairement par l'angle 2α sur le cercle de Mohr. Les normales \vec{x} et $\hat{1}$ orientant les facettes réelles sont positionnées angulairement par l'angle α (compte tenu du sens descendant de l'axe $\vec{\tau}$ sur le cercle de Mohr, les angles 2α et α entre les axes \vec{x} et $\hat{1}$, respectivement sur le cercle de Mohr et sur les facettes, doivent être décrits dans les **mêmes** sens).

a) tracé du cercle de Mohr

b) directions et facettes principales



• les résultats obtenus par le tracé du cercle de Mohr ($\alpha = +73^\circ$ {modulo $\pi/2$ }) peuvent être vérifiés en utilisant les expressions analytiques précédentes.

4. INTERPRETATION PHYSIQUE

➔ représentations du vecteur contrainte globale dans les axes fixes relatifs à l'ellipse de Lamé

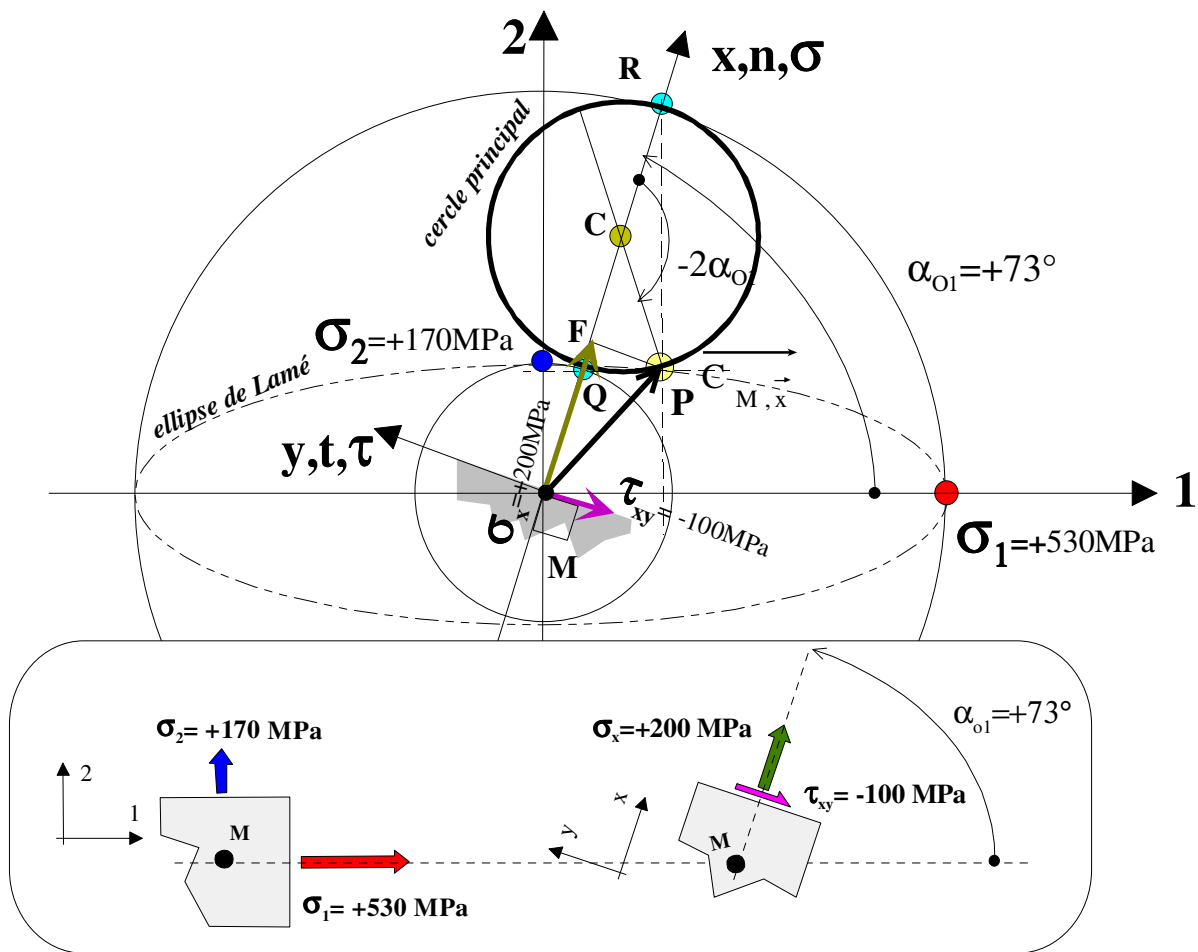
Si l'état de contraintes principales est connu, on montre que l'extrémité du vecteur contrainte totale $\vec{C}_{M,x}$ au point M pour une facette de normale \vec{x} d'angle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ par rapport à la direction principale $\hat{1}$, décrit une ellipse de demi-axes σ_1 et σ_2 ayant pour équation $\frac{C_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{C_2^2}{\sigma_2^2} = 1$ avec $\vec{C}_{M,x} = C_1 \hat{1} + C_2 \hat{2} = \sigma_1 \cos \alpha \hat{1} + \sigma_2 \sin \alpha \hat{2}$. Cette ellipse s'appelle l'ellipse des contraintes (ou de Lamé) relative au plan principal $(\hat{1}, \hat{2})$.

Problème : autour du point M, pour l'état de contraintes principales donné et pour la facette de normale \vec{x} , ici d'angle $\alpha_{01} = (\hat{1}, \vec{x}) = +73^\circ$, on souhaite connaître :

- le vecteur contrainte globale $\vec{C}_{M,x}$

- les deux composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte globale $\vec{C}_{M,x} = \sigma_x \vec{x} + \tau_{xy} \vec{y}$

Construction géométrique d'un point de l'ellipse : au point M on trace le repère principal $(\vec{1}, \vec{2})$ et deux cercles concentriques, ici de rayons $\sigma_1 = +530\text{MPa}$ et $\sigma_2 = +170\text{MPa}$. La normale \vec{x} coupe les deux cercles en R et Q. Du point Q (sur cercle σ_2) on mène une perpendiculaire à $\vec{2}$ et du point R (sur cercle σ_1) une perpendiculaire à $\vec{1}$. L'intersection de ces deux droites donne le point P, c'est un point de l'ellipse de Lamé et l'extrémité de $\vec{C}_{M,x}$. Ses deux projections dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) lié à la facette, donne ses deux composantes : $\vec{C}_{M,x} = \sigma_x \vec{x} + \tau_{xy} \vec{y} = +200\vec{x} - 100\vec{y}$ (on retrouve des valeurs conformes à celles utilisées pour tracer le cercle de Mohr précédent). A partir de C milieu de QR on peut tracer le cercle principal de rayon $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, l'intersection de ce cercle et de l'ellipse donne naturellement le point P (analogie avec la représentation de Mohr déjà vue). On peut remarquer que ces deux représentations l'angle $\alpha_{01} = (\vec{1}, \vec{x})$ et l'angle $2\alpha_{01} = (\vec{x}, \vec{CP})$ sont décrits en sens opposés, alors que sur la représentation de Mohr seule les deux angles sont décrits par le même sens pour plus de commodité



→ Compléments sur l'utilisation de la représentation de Lamé

Les figures suivantes donnent pour une facette de normale \vec{x} orientée par un angle $0 < \alpha_{01} < \frac{\pi}{2}$ par rapport à l'axe principal $\vec{1}$

les différentes configurations de la représentation de Lamé en fonction des valeurs des contraintes principales. En fonction de ces valeurs de contraintes, on remarquera principales :

- les localisations des secteurs angulaires, lieux de R et Q
- les portions d'ellipse utilisées (lieu de P)
- le sens du vecteur contrainte globale dirigé « vers la matière » ou « hors la matière » de la facette de normale sortante \vec{x}
- les diamètres différents des cercles principaux
- le changement d'orientation de l'ellipse pour la dernière figure
- le vecteur contrainte globale sur une facette perpendiculaire à la précédente se déduit des constructions géométriques à réaliser dans le cercle principal (cf. cercle de Mohr)

