

**PYLONE TELESIEGE - TORSEURS DES ACTIONS TRANSMISSIBLES ET DE COHESION**

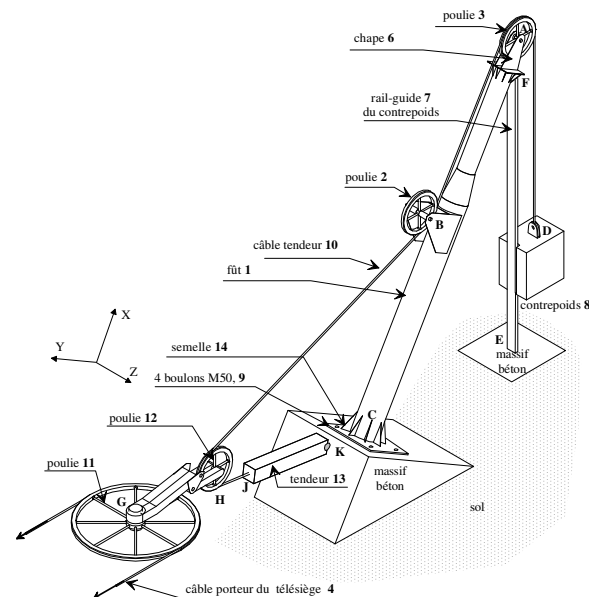
Le modèle de calcul poutres ci-dessous, représente un dispositif (fig. ci-contre) permettant d'assurer la tension permanente d'un câble porteur d'un télésiège par l'intermédiaire d'un système de poulies fixé sur un pylône (fût). Un second câble tendeur lié au sol s'enroule sur ces poulies et assure la *tension* grâce à un *contrepois* glissant sur un profilé utilisé seulement comme rail-guide vertical (non structural).

**Données**

- liaisons parfaites et poids de la structure négligé
- actions extérieures : contrepois  $\vec{P}$  (norme du vecteur représentant le poids du contrepois  $P = 20000\text{ N}$ ) et support et sens de la tension  $\vec{T}$  dans le câble considéré inextensible
- pour faciliter les calculs on donne les points d'intersection A et B des supports des deux actions mécaniques avec l'axe du fût 1
- géométrie :  $AC = 4\text{ m}$  /  $BC = 2\text{ m}$  /  $GC = 1\text{ m}$

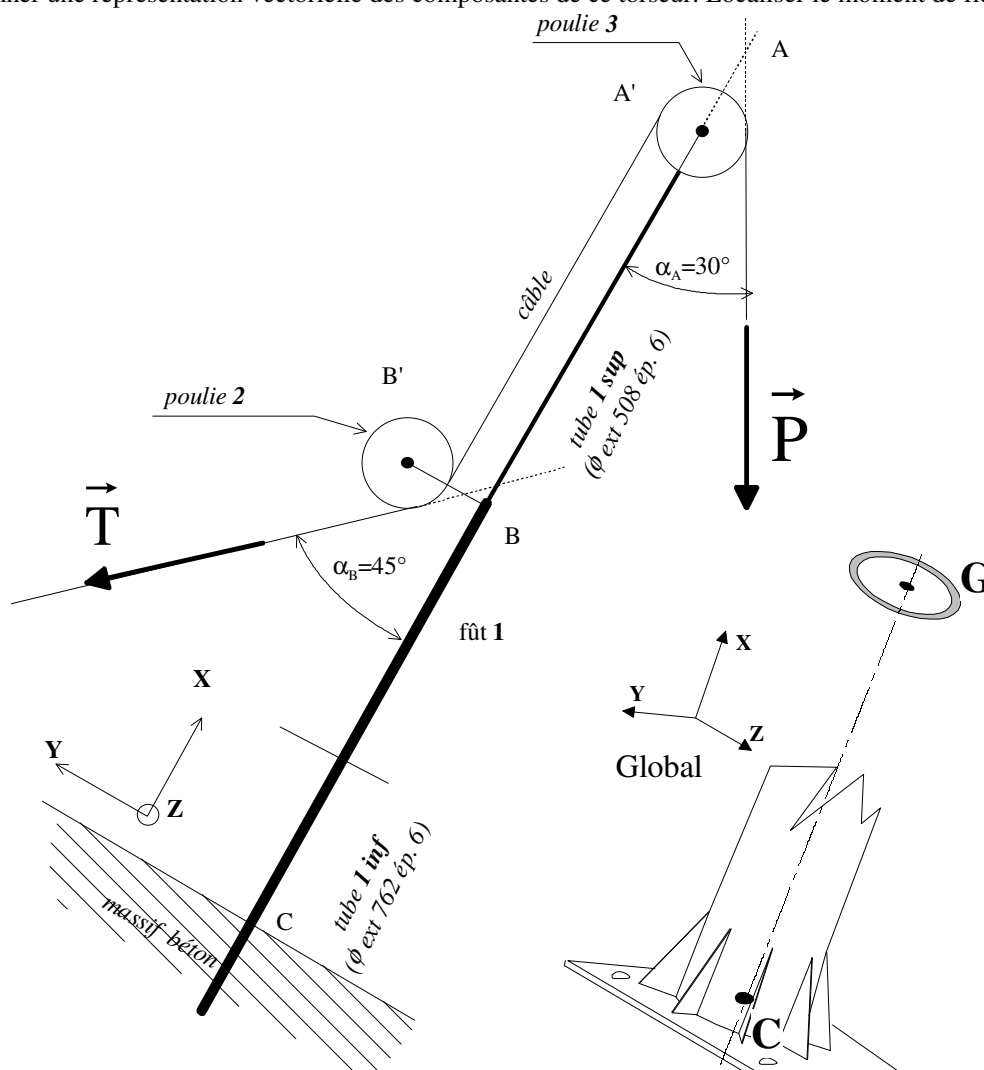
**Travail à faire :**

- 1- en déduire la norme du vecteur représentant la tension  $\vec{T}$  dans le câble
- 2- calculer le torseur des actions mécaniques transmissibles du massif béton sur la semelle au centre géométrique C de la liaison (semelle+fût) sur (massif béton).



Donner une représentation vectorielle des composantes de ce torseur. Préciser toutes les étapes de la méthode de calcul (système isolé, bilan des actions mécaniques extérieures, principe fondamental)

- 3- calculer le torseur de cohésion au centre géométrique G d'une section droite du fût. Définir un repère local et le tracer en perspective). Donner une représentation vectorielle des composantes de ce torseur. Localiser le moment de flexion maximum.



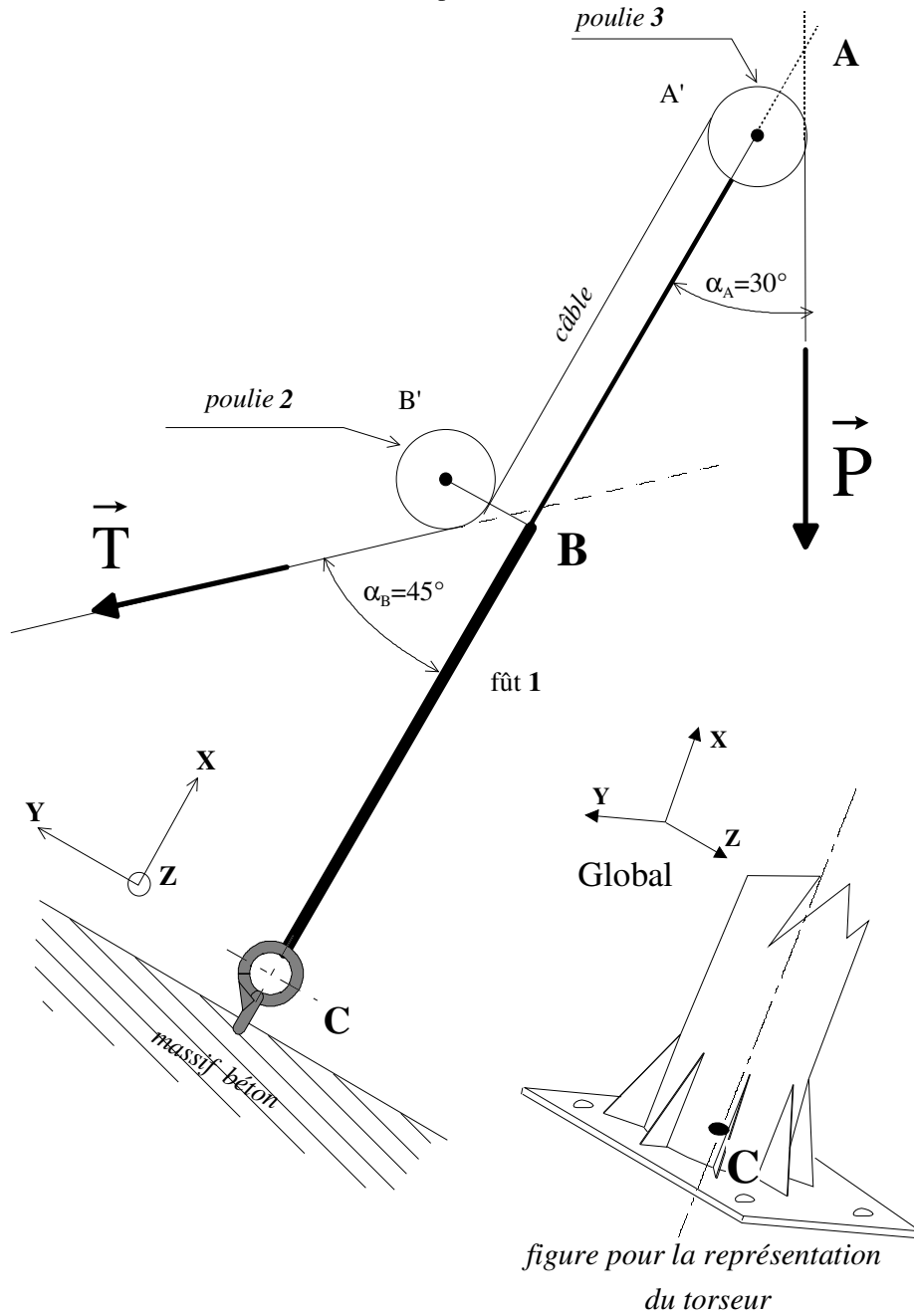
figures pour les représentations  
des deux torseurs

4- Une autre disposition constructive pour ce pylône est envisagée sur la figure ci-dessous. Il s'agit de remplacer l'encastrement en C par une articulation pivot d'axe Z. La direction de la tension du câble support de  $\vec{T}$  est conservée, soit  $45^\circ$  par rapport à l'axe du fût.

- Pour cette nouvelle disposition, vérifier par une étude statique graphique la situation d'équilibre du fût. Conclusion.

- Afin que l'équilibre statique du fût soit garanti, il est décidé de repositionner la poulie 2 sur le fût (ou le point B, intersection du support de la tension et de l'axe du fût). A partir d'une étude statique graphique rechercher cette position du point B et en déduire l'action du massif sur l'articulation C. Calculer l'angle d'inclinaison du support de  $\vec{C}$  par rapport à l'axe du fût.

- Comparer les résultats obtenus avec ceux de l'encastrement précédent



## ELEMENTS DE CORRECTION

1- le câble étant tendu et supposé inextensible, donc  $\|\vec{T}\| = \|\vec{P}\| = 20000\text{N}$

2-◆ ensemble {fut, poulies, brins de câble} isolé

◆ bilan des actions mécaniques extérieures

$$\{F_{T \text{ cable ext/brincable}}\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = -14142,3\vec{X} + 14142,3\vec{Y} \\ \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0} \end{array} \right\}_{B,R} ; \{F_{\text{pesanteur/brin cable}}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = -17320,5\vec{X} - 10000\vec{Y} \\ \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0} \end{array} \right\}_{A,R}$$

$$\{F_{\text{massif/fute}}\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{C} = X_C\vec{X} + Y_C\vec{Y} + Z_C\vec{Z} \\ \vec{\mathcal{M}}_C = L_C\vec{X} + M_C\vec{Y} + N_C\vec{Z} \end{array} \right\}_{C,R} ; \text{6 inconnues algébriques}$$

◆ application du principe fondamental de la statique

$$\sum (\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) / C = \vec{CA} \wedge \vec{P} + \vec{CB} \wedge \vec{T} + \vec{\mathcal{M}}_C = \vec{0}$$

$$\vec{CA} \wedge \vec{P} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ +4 & 0 & 0 \\ -17320,5 & -10000 & 0 \end{bmatrix} = -40000\vec{Z} ; \vec{CB} \wedge \vec{T} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ +2 & 0 & 0 \\ -14142,3 & +14142,3 & 0 \end{bmatrix} = +28284,6\vec{Z}$$

◆ équations de projection dans XYZ

$$\begin{array}{l} \text{forces} \\ / X : -17320,5 - 14142,3 + X_C = 0 \\ / Y : -10000 + 14142,3 + Y_C = 0 \\ / Z : 0 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{moments} \\ / X : 0 = 0 \\ / Y : 0 = 0 \\ / Z : -40000 + 28284,6 + N_C = 0 \end{array}$$

- résultats :  $X_C = +31462,8$  (N) ;  $Y_C = -4132,3$  (N) ;  $N_C = +11715,4$  (N.m)

◆ Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon

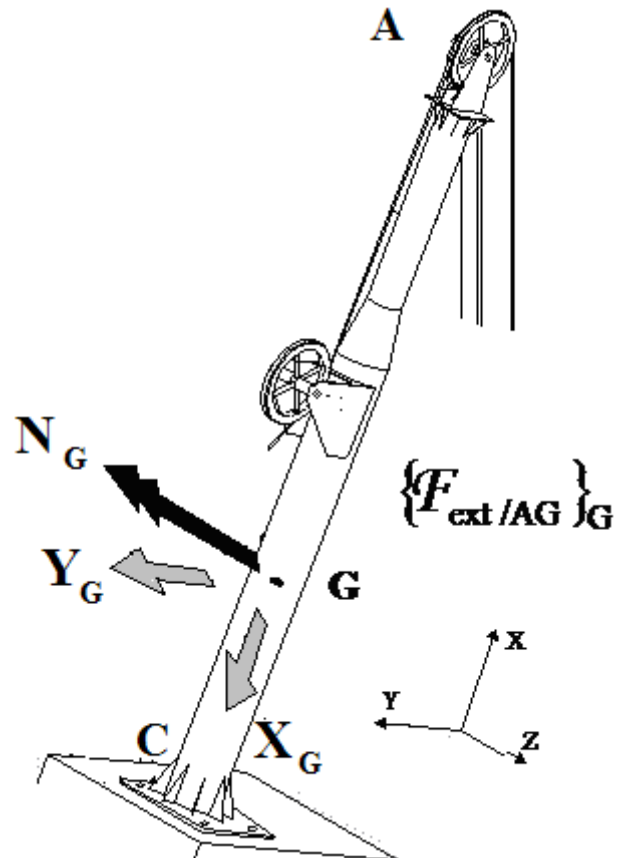
GA exprimé au point G

$$\{F_{\text{ext/GA}}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = \vec{T} + \vec{P} \\ \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{GA} \wedge \vec{P} + \vec{GB} \wedge \vec{T} \end{array} \right\}_{G,R}$$

$$\vec{GA} \wedge \vec{P} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ +3 & 0 & 0 \\ -17320,5 & -10000 & 0 \end{bmatrix} = -30000\vec{Z} ;$$

$$\vec{GB} \wedge \vec{T} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ +1 & 0 & 0 \\ -14142,3 & +14142,3 & 0 \end{bmatrix} = +14142,3\vec{Z}$$

$$\Rightarrow \{F_{\text{ext/AG}}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = -31462,8\vec{X} + 4142,3\vec{Y} \\ \vec{\mathcal{M}}_G = -15857,7\vec{Z} \end{array} \right\}_{G,R}$$



◆ torseur de cohésion :

- éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G de la section droite entre CG=1m
- partie supprimée GA ; partie conservée CG (compte tenu du choix de l'expression du torseur précédent)
- axe local  $\vec{x}$  : normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée
- changement de base : Local (r) au Global (R), ici les deux repères peuvent être identiques :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = \vec{x} \\ \vec{Y} = \vec{y} \\ \vec{Z} = \vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \{F_{ext/GA}\}_G$$

(ou aussi  $\{Coh_{sup/cons}\}_G = -\{F_{ext/GC}\}_G$ , voir fig. ci-contre)

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \begin{Bmatrix} N_x = -31462,8 & M_t = 0 \\ T_y = +4142,3 & Mf_y = 0 \\ T_z = 0 & Mf_z = -15857,7 \end{Bmatrix}_{G,r}$$

- effort normal  $N_x \Rightarrow$  sollicitation de compression avec contraintes normales
- effort tranchant  $T_y \Rightarrow$  sollicitation de cisaillement avec contraintes tangentielles
- moment de flexion  $Mf_z \Rightarrow$  sollicitation de flexion avec contraintes normales

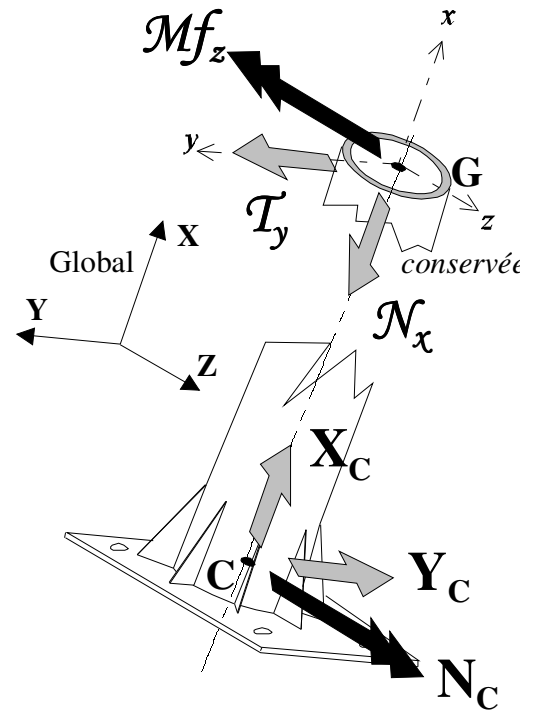
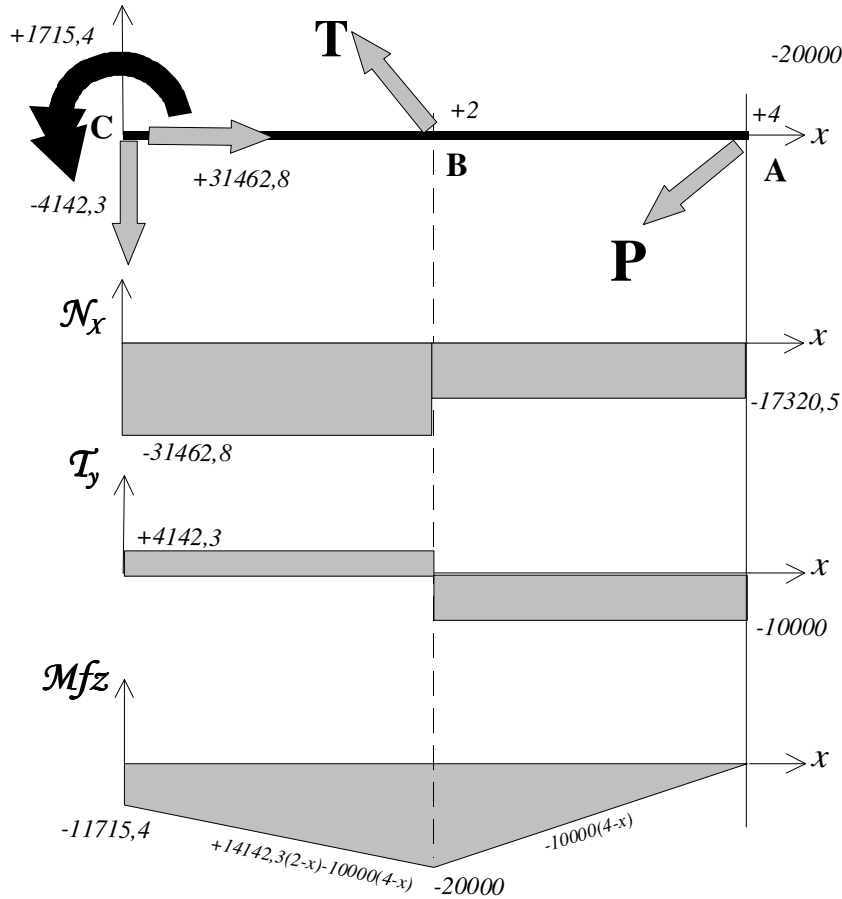
◆ remarque : si l'on veut tracer les diagrammes d'évolution de  $T_y$  et  $Mf_z$ , il est nécessaire de connaître les expressions de ce moment de flexion le long de la ligne moyenne de la structure :

$$Mf_{zAB} = -10000(4-x) ; Mf_{zBC} = +14142,3(2-x) - 10000(4-x)$$

On peut noter que le moment de flexion maximum se situe au point B :  $Mf_{zB} = -20000$  (N.m) et non pas à l'encastrement C.

On peut vérifier l'expression de l'effort tranchant en fonction de la dérivée du moment de flexion :  $T_y = -\frac{dMf_z}{dx}$

$$T_{yAB} = -\frac{dMf_{zAB}}{dx} = -10000 ; T_{yCA} = -\frac{dMf_{zBC}}{dx} = +4142,3$$



4-

◆ Justification de l'impossibilité de réaliser l'équilibre si C est une liaison pivot et les deux efforts  $\vec{P}$  et  $\vec{T}$  ont leur support inchangé

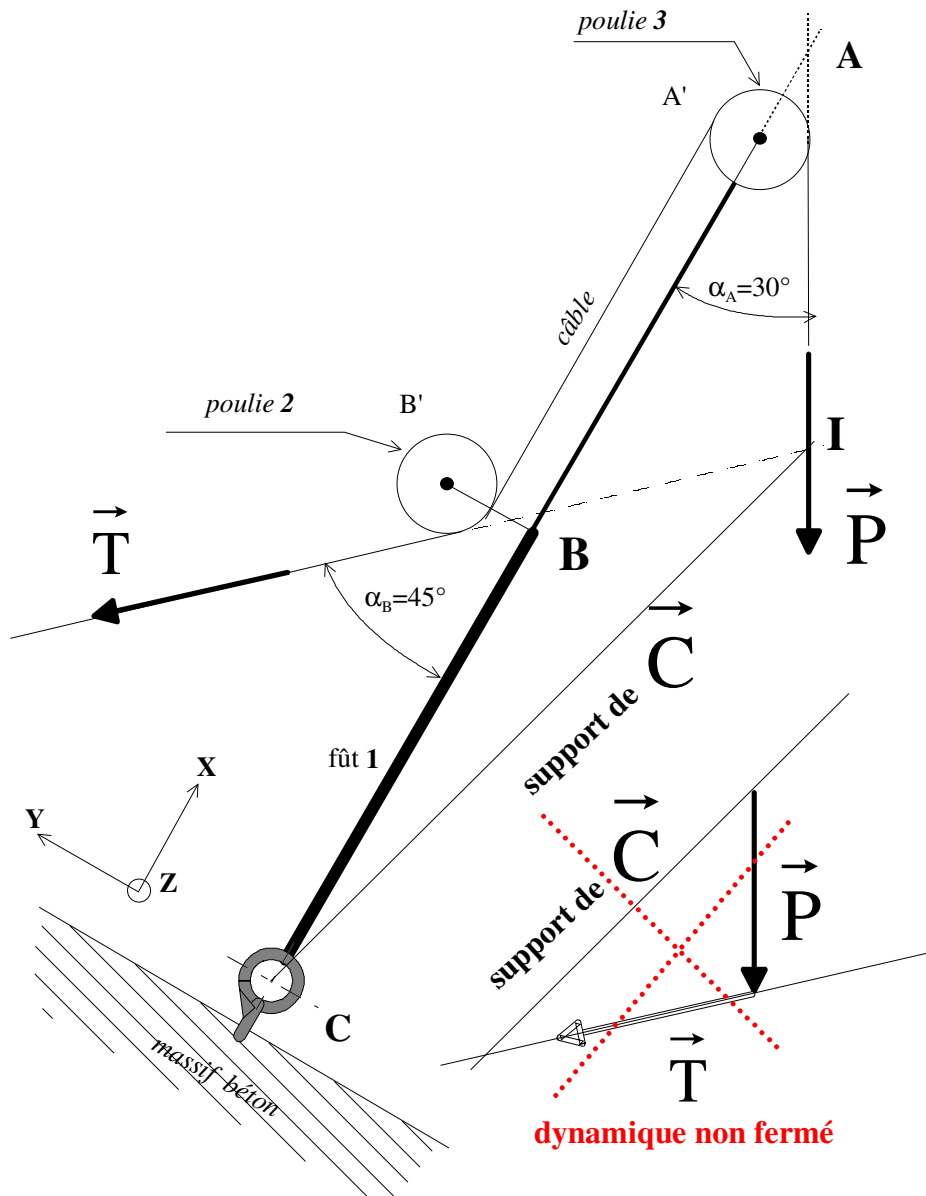
- problème plan XY (systèmes de forces dans le plan XY), pivot d'axe Z en C :

$$\{F_{\text{massif/fûte}}\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{C} = X_C \vec{X} + Y_C \vec{Y} \\ \vec{M}_C = \vec{0} \end{array} \right\}_{C,R} ; 2 \text{ inconnues}$$

S'il y a équilibre (loi des 3 forces) :

- supports des trois forces concourants en même point I : le support de  $\vec{C}$  passe par le point C et le point d'intersection I des deux autres supports  $\vec{P}$  et  $\vec{T} \Rightarrow \sum \overline{\mathcal{M}(F_{\text{ext}})} / I = \vec{0}$

- le dynamique des forces doit être fermé  $\Rightarrow \sum \overline{(F_{\text{ext}})} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{C} = \vec{0}$  ce qui est impossible à réaliser compte tenu que les directions et les normes de  $\vec{P}$  et  $\vec{T}$  sont données. Donc l'équilibre du fût est impossible.



◆ Etude de statique graphique (loi des 3 forces)

1°- tracer le dynamique des forces en déduire le support de la force en  $\vec{C}$  et sa direction  $\Rightarrow \sum \overline{(F_{\text{ext}})} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{C} = \vec{0}$

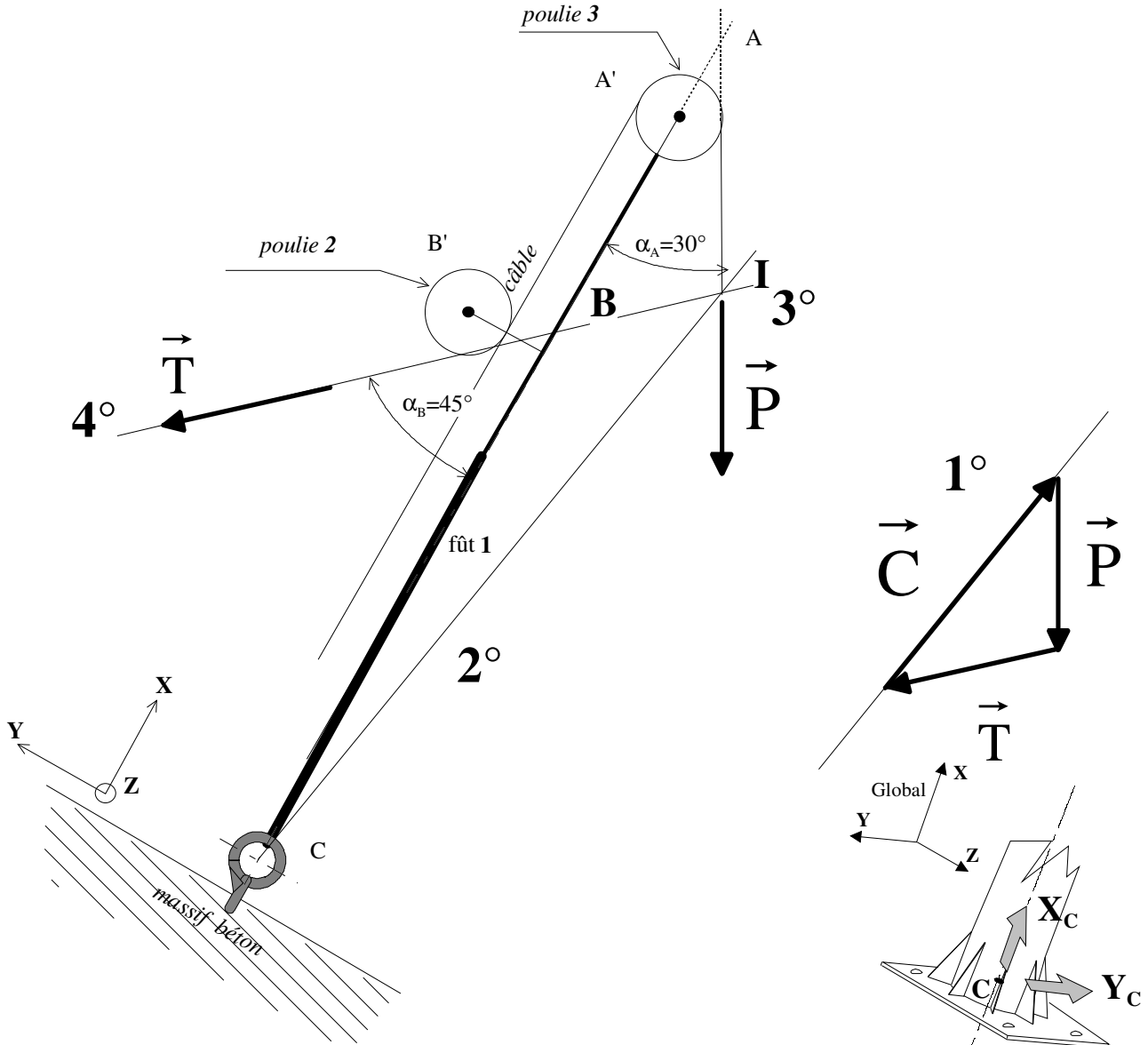
2°- tracer le support de la force  $\vec{C}$  passant par le point C

3°- chercher le point d'intersection I des supports de  $\vec{P}$  et de  $\vec{C}$

4°- supports des trois forces concourants en même point I : par le point I tracer le support de  $\vec{T}$  (direction connue)  $\Rightarrow \sum \overline{\mathcal{M}(F_{\text{ext}})} / I = \vec{0}$

et l'on obtient le point B donc la position de la poulie 2

- ◆ Angle d'inclinaison du support de  $\vec{C}$  par rapport à l'axe du fût :  
 Triangle ABI :  $45^\circ + 30^\circ + 105^\circ = 180^\circ$   
 Triangle isocèle dynamique des force fermé :  $105^\circ + 37,5^\circ + 37,5^\circ = 180^\circ$   
 Triangle BIC, angle du support de  $\vec{C}$  :  $180^\circ - ((180^\circ - 45^\circ) + 37,5^\circ) = 7,5^\circ$



- on constate que la force transmissible en C est quasi identique avec celle transmise par l'encastrement ; par contre le moment / axe Z a disparu.