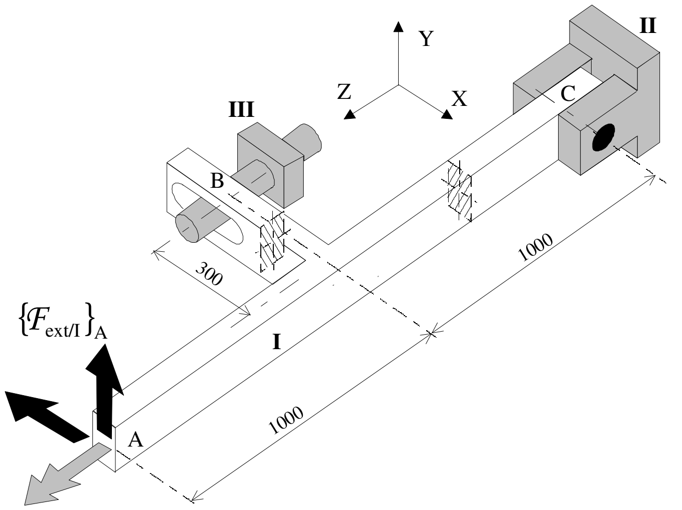
NOM :

ELEMENTS DE REDUCTION DU TORSEUR DE COHESION : ELEMENT STRUCTURAL EN T

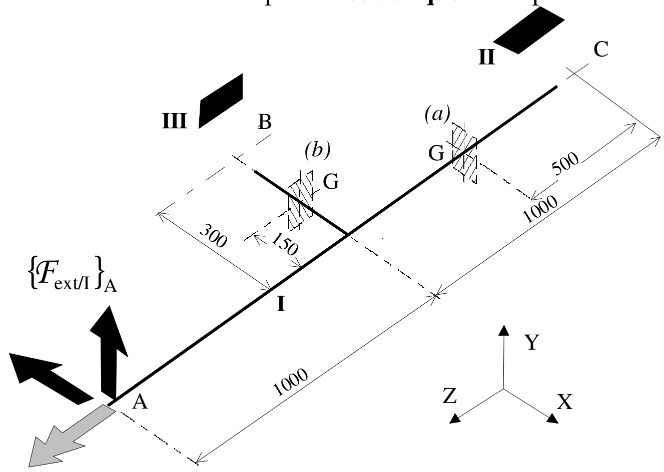
Un élément structural mécanosoudé I (acier S 235) de forme en T d'un mécanisme est lié à un bâti II par une articulation à chape d'axe $\vec{X}$ et par un doigt d'arrêt cylindrique III d'axe $\vec{Z}$ à travers un trou oblong usiné dans I.
Structure dont le poids propre est négligé et ses liaisons avec l'environnement sont parfaites. Elle est sollicitée par un chargement extérieur appliqué au point A caractérisé par le torseur des actions mécaniques transmissibles (unités : N et N.mm) :

$$\{\mathcal{F}_{ext/I}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{A} = -1000\vec{X} + 2000\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A} = 3000000\vec{Z} \end{Bmatrix}_{A,R}$$

structure réelle



modèle de calcul poutre **isostatique** à compléter



1. Si on affecte directement aux deux liaisons technologiques B et C les modèles de liaisons usuelles normalisées, il en résulte un modèle de calcul **hyperstatique** pour cette structure. Pourquoi ?

2. Compléter alors le modèle de calcul poutre afin qu'il soit **isostatique** tout en gardant son caractère articulé (noms et représentations des symboles des liaisons). Pour les liaisons modélisées en B et C, donner les expressions littérales **générales** des torseurs des actions mécaniques transmissibles de l'environnement extérieur→ (I) dans le repère **global** R(XYZ)

liaison B :

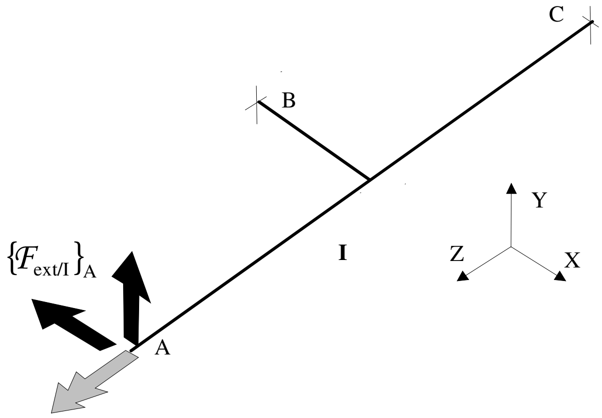
liaison C :

3. Calculer ces torseurs des actions mécaniques transmissibles, en précisant les étapes permettant de les calculer.

liaison B:

liaison C:

donner ci-contre la représentation vectorielle des éléments de réduction de ces 2 torseurs (vérifier la cohérence des sens des vecteurs)



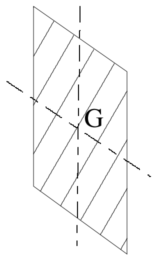
4. Donner l'expression **générale** d'un torseur de cohésion exprimé dans un repère **local** *r (xyz)*,

5. Dessiner ci-dessous les repères locaux sur les 2 sections représentées au centre de géométrique d'une section droite d'une poutre (trièdre direct avec: $\vec{x}$ normale sortante à la section droite de la partie conservée, $\vec{y} = \vec{Y}$ et $\vec{z}$ situé dans le plan de symétrie XZ de la structure)

Calculer les éléments de réduction de ce torseur de cohésion au centre de géométrique de chaque section droite hachurée, en donner une représentation vectorielle et en déduire la nature des sollicitations.

section (a):

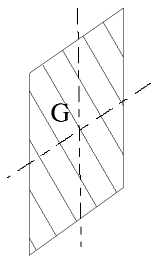
éléments de réduction du torseur de cohésion:



sollicitations:

section (b)

éléments de réduction du torseur de cohésion:



sollicitations:

.

ELEMENTS DE CORRECTION

➔ liaisons usuelles modélisant les deux liaisons technologiques B et C

en B liaison linéaire rectiligne : $\{\mathcal{F}_{III/I}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = Y_B\,\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = L_B\,\vec{X} \end{Bmatrix}_{B,R}$;

en C liaison pivot : $\{\mathcal{F}_{II/I}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C} = X_C\,\vec{X} + Y_C\,\vec{Y} + Z_C\,\vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = M_C\,\vec{Y} + N_C\,\vec{Z} \end{Bmatrix}_{C,R}$

Ces modélisations entrainent 7 inconnues algébriques, donc système hyperstatique

➔ ensemble poutre-pivot isolé

➔ modèle de calcul isostatique

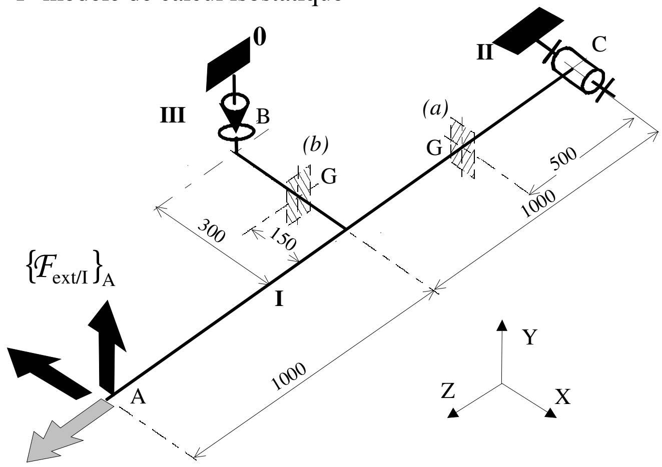
➔ bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé

en A $\{\mathcal{F}_{ext/I}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{A} = -1000\vec{X} + 2000\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A} = 3000000\vec{Z} \end{Bmatrix}_{A,R}$;

en B liaison appui ponctuel $\{\mathcal{F}_{III/I}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = Y_B\,\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{B,R}$;

en C liaison pivot $\{\mathcal{F}_{II/I}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C} = X_C\,\vec{X} + Y_C\,\vec{Y} + Z_C\,\vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = M_C\,\vec{Y} + N_C\,\vec{Z} \end{Bmatrix}_{C,R}$

6 inconnues algébriques



➔ application du principe fondamental de la statique

$$\sum \overrightarrow{(F_{ext})} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}(F_{ext})/_C} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{A} + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{B} + \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{CA} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & 0 & +2000 \\ -1000 & +2000 & 0 \end{bmatrix} = -4000000\vec{X} - 2000000\vec{Y} \;;$$

$$\overrightarrow{CB} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ -300 & 0 & 1000 \\ 0 & Y_B & 0 \end{bmatrix} = -1000Y_B\,\vec{X} - 300Y_B\,\vec{Z}$$

forces

$/X:\ -1000 + X_C = 0 \ \Rightarrow X_C = 1000$

$/Y:\ +2000 + Y_C + Y_B = 0$

$/Z:\ Z_C = 0$

moments

$/X:\ -4000000 - 1000Y_B = 0 \ \Rightarrow Y_B = -4000$

$/Y:\ -2000000 + M_C = 0 \Rightarrow M_C = 2000000$

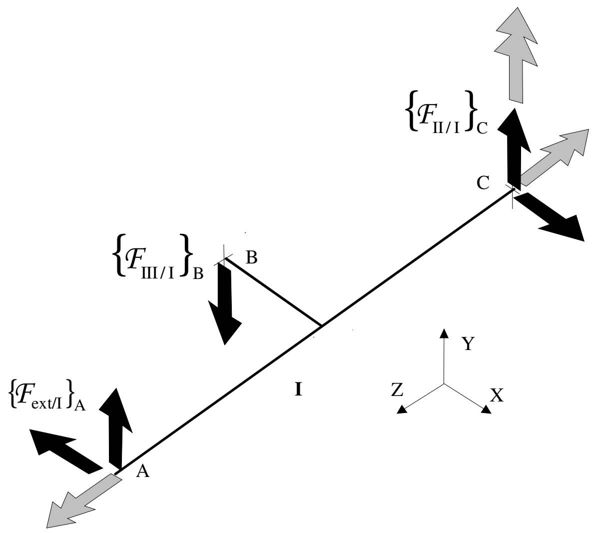
$/Z:\ +3000000 - 300Y_B + N_C = 0$

donc Y_C = + 2000 et N_C = - 4200000

➔ résultats :

$\{\mathcal{F}_{III/I}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = -4000\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{B,R}$;

$\{\mathcal{F}_{II/I}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C} = 1000\vec{X} + 2000\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = 2000000\vec{Y} - 4200000\vec{Z} \end{Bmatrix}_{C,R}$



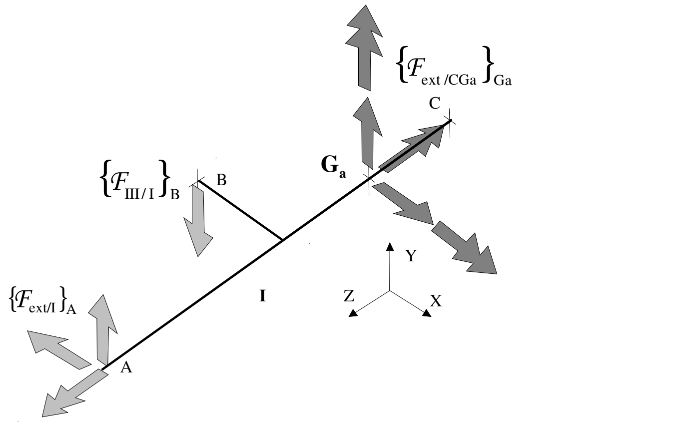
➔ **section (a)**

◆ Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon CG_a exprimé au point G_a

$$\left\{\mathcal{F}_{ext/CGa}\right\}_{Ga} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_a} = \vec{C} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Ga}} = \overrightarrow{G_aC} \wedge \vec{C} + M_C\vec{Y} + N_C\vec{Z} \end{Bmatrix}_{Ga,R}$$

$$\overrightarrow{G_aC} \wedge \vec{C} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & 0 & -500 \\ +1000 & +2000 & 0 \end{bmatrix} = +1000000\vec{X} - 500000\vec{Y}$$

$$\Rightarrow \left\{\mathcal{F}_{ext/CGa}\right\}_{Ga} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_a} = +1000\vec{X} + 2000\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Ga}} = +1000000\vec{X} + 2000000\vec{Y} - 4200000\vec{Z} \end{Bmatrix}_{Ga,R}$$



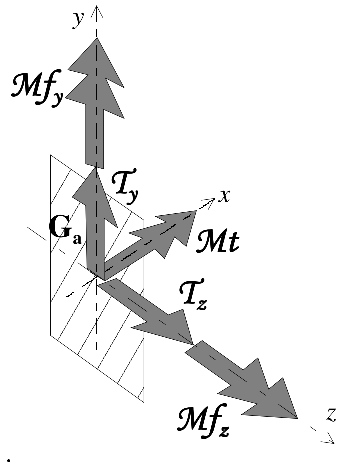
◆ Torseur de cohésion :

- partie supprimée CG_a ; partie conservée G_aBA
- axe local $\vec{x}$: normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée
- changement de base : Local (r) au Global (R) :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = \vec{z} \\ \vec{Y} = \vec{y} \\ \vec{Z} = -\vec{x} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\mathcal{C}oh_{sup/cons}\right\}_{Ga} = \left\{\mathcal{F}_{ext/CGa}\right\}_{Ga}$$

$$\left\{\mathcal{C}oh_{sup/cons}\right\}_{Ga} = \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_x = 0 & \mathcal{M}_t = +4200000 \\ \mathcal{T}_y = +2000 & \mathcal{M}f_y = +2000000 \\ \mathcal{T}_z = +1000 & \mathcal{M}f_z = +1000000 \end{Bmatrix}_{Ga,r}$$



$\Rightarrow$ sollicitations :

$\mathcal{T}y \Rightarrow$ cisaillement

$\mathcal{M}t \Rightarrow$ torsion de l'axe x

$\mathcal{M}fz \Rightarrow$ flexion autour de l'axe z

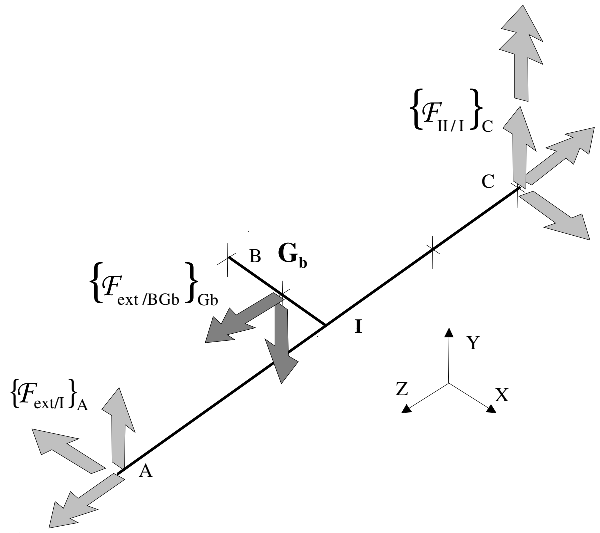
➔ **section (b)** $\left\{\mathcal{F}_{ext/BGb}\right\}_{Gb}$

◆ Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon BG_b exprimé au point G_b

$$\left\{\mathcal{F}_{ext/BGb}\right\}_{Gb} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_b} = \vec{B} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gb}} = \overrightarrow{G_bB} \wedge \vec{B} \end{Bmatrix}_{Gb,R}$$

$$\overrightarrow{G_bB} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ -150 & 0 & 0 \\ 0 & -4000 & 0 \end{bmatrix} = +600000\vec{Z}$$

$$\Rightarrow \left\{\mathcal{F}_{ext/BGb}\right\}_{Gb} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_b} = -4000\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gb}} = +600000\vec{Z} \end{Bmatrix}_{Gb,R}$$



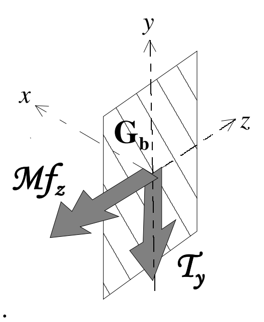
◆ Torseur de cohésion :

- partie supprimée BG_b ; partie conservée G_bAC
- axe local $\vec{x}$: normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée
- changement de base : Local (r) au Global (R) :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = -\vec{x} \\ \vec{Y} = \vec{y} \\ \vec{Z} = -\vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\mathcal{C}oh_{sup/cons}\right\}_{Gb} = \left\{\mathcal{F}_{ext/BGb}\right\}_{Gb}$$

$$\left\{\mathcal{C}oh_{sup/cons}\right\}_{Gb} = \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_x = 0 & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = -4000 & \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z = -600000 \end{Bmatrix}_{Gb,r}$$



$\Rightarrow$ sollicitations :

$\mathcal{T}y \Rightarrow$ cisaillement

$\mathcal{M}fz \Rightarrow$ flexion autour de l'axe z