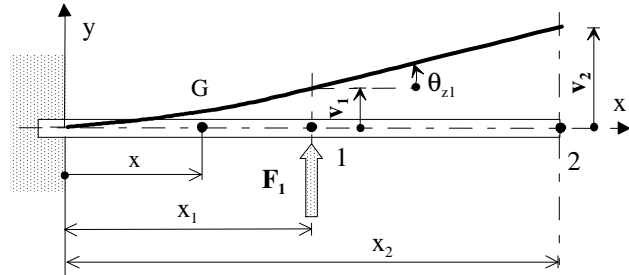


UTILISATION DES RELATIONS DE COMPORTEMENT

Application n°1 (résolue)

Calcul des déplacements linéaires et angulaires totaux aux points (1) et (2) d'une poutre console encastrée à une extrémité et chargée par un effort $\vec{F}_1 = F_1 \vec{y}$ à l'abscisse x_1



□ éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G d'une section courante d'abscisse $0 \leq x \leq x_1$:

$$\{Coh\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_y = F_1 \vec{y} \\ \mathcal{M}f_z = F_1(x_1 - x)\vec{z} \end{array} \right\}_G$$

□ relation de comportement au moment de flexion : $\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\mathcal{M}f_z}{EI}$

où $v(x)$ est le déplacement suivant \vec{y} de tout point de la ligne moyenne déformée de la poutre.

□ résolution de l'équation différentielle

dans la zone $0 \leq x \leq x_1$ la déformée $v(x)$ vérifie donc l'équation différentielle : $EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \mathcal{M}f_z = F_1(x_1 - x)$

♦ une première intégration permet d'obtenir : $EI \frac{dv}{dx} = -F_1 \frac{x^2}{2} + F_1 x_1 x + C_1$

la constante d'intégration C_1 disparaît du fait de l'encastrement en $x = 0$, la tangente à l'encastrement étant horizontale :

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 \text{ et donc } EI \frac{dv}{dx} = -F_1 \frac{x^2}{2} + F_1 x_1 x$$

♦ une seconde intégration permet d'obtenir : $EI v(x) = -F_1 \frac{x^3}{6} + F_1 x_1 \frac{x^2}{2} + C_2$

la constante d'intégration C_2 disparaît du fait de l'encastrement en $x = 0$, le déplacement étant nul $v(0) = 0$:

$$EI v(x) = -F_1 \frac{x^3}{6} + F_1 x_1 \frac{x^2}{2} = F_1 \frac{x^2}{2} \left(x_1 - \frac{x}{3} \right)$$

□ détermination des déplacements :

(notation indicielle : v_{ij} (ou θ_{zij}) déplacement linéaire (ou angulaire) du point i engendré par un effort appliqué au point j

○ au point (1) à l'abscisse $x = x_1$

♦ déplacement linéaire (flèche):

$$v(x_1) = F_1 \frac{x_1^3}{3EI} = v_{11}$$

♦ déplacement angulaire (rotation de section sans prise en compte des effets de l'effort tranchant):

$$\theta_z(x_1) \cong \frac{dv(x_1)}{dx} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} = \theta_{z11}$$

○ au point (2) à l'abscisse $x = x_2$

♦ déplacement linéaire à l'abscisse $x_2 > x_1$ s'écrit alors, en remarquant que la portion de poutre $x_1 \leq x \leq x_2$ reste rectiligne (utilisation de l'équation de cette portion de poutre rectiligne non déformée et $\tan \theta_z(x_1) \cong \theta_z(x_1)$)

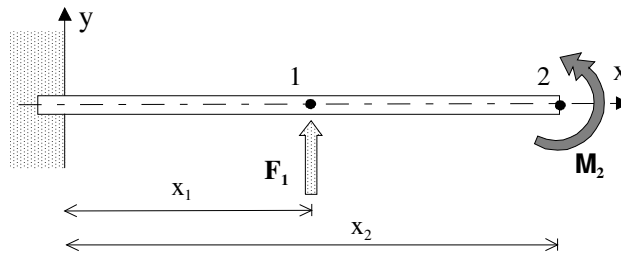
$$v(x_2) = v(x_1) + \frac{dv(x_1)}{dx} (x_2 - x_1)$$

$$v(x_2) = F_1 \frac{x_1^3}{3EI} + F_1 \frac{x_1^2}{2EI} (x_2 - x_1) \quad \text{soit} \quad v(x_2) = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} \left(x_2 - \frac{x_1}{3} \right) = v_{21}$$

♦ déplacement angulaire (rotation de section dans zone rectiligne) : $\theta_z(x_2) = \theta_z(x_1) = \theta_{z21}$

Application n°2 (à résoudre)

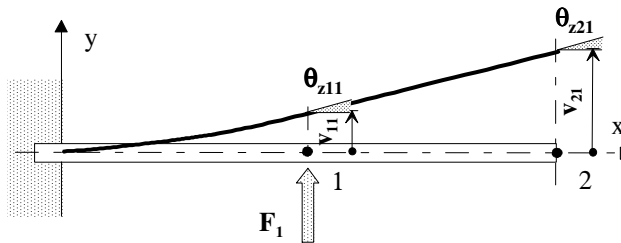
Calcul des déplacements linéaires et angulaires totaux aux points 1 et 2 d'une poutre console encastrée à une extrémité et est soumise à une force $\vec{F}_1 = F_1 \vec{y}$ en (1) et un moment $\vec{M}_2 = M_2 \vec{z}$ en (2), l'axe \vec{z} complétant le trièdre direct (xyz).



□ méthodologie : application du principe de superposition des effets du chargement séquentiel par \vec{F}_1 et ensuite par \vec{M}_2

♦ cas de chargement par \vec{F}_1 seule à l'abscisse x_1 , dans la zone $x \leq x_1$ la déformée $v(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$EIv(x) = F_1 \frac{x^2}{2} (x_1 - \frac{x}{3})$$

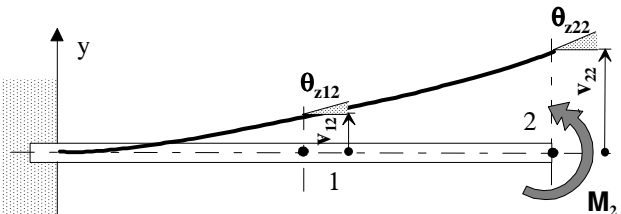


Utiliser les résultats de l'application n°1 pour déterminer les déplacements partiels :

au point (1) déplacements : v_{11} et θ_{z11}

au point (2) déplacements : v_{21} et θ_{z21}

♦ cas de chargement par \vec{M}_2 seul à l'abscisse x_2 et étude du comportement dans la zone $0 \leq x \leq x_2$ (reprendre la démarche complète développée dans l'application n°1)

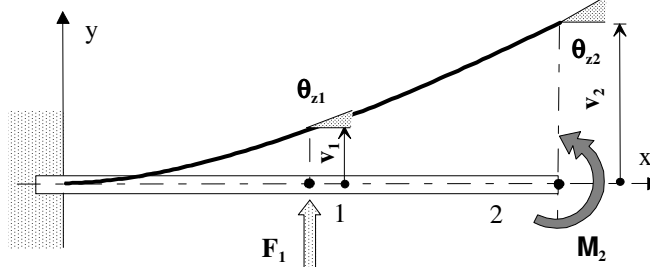


Déterminer les déplacements partiels :

au point (1) déplacements : v_{12} et θ_{z12}

au point (2) déplacements : v_{22} et θ_{z22}

□ déterminer les déplacements totaux (principe de superposition des déplacements):



au point (1) : $v_1 = v_{11} + v_{12}$ et $\theta_{z1} = \theta_{z11} + \theta_{z12}$

au point (2) : $v_2 = v_{21} + v_{22}$ et $\theta_{z2} = \theta_{z21} + \theta_{z22}$

ELEMENTS DE CORRECTION

- ♦ cas de chargement par \vec{F}_1 seule à l'abscisse x_1 , dans la zone $x \leq x_1$ la déformée $v(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$EIv(x) = F_1 \frac{x^2}{2} \left(x_1 - \frac{x}{3}\right)$$

d'où :

$$\text{au point (1) : } v_{11} = F_1 \frac{x_1^3}{3EI} \text{ et } \theta_{z11} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI}$$

$$\text{au point (2) : } v_{21} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} \left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right) \text{ et } \theta_{z21} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI}$$

- ♦ cas de chargement par le moment \vec{M}_2 seul à l'abscisse x_2 . Dans la zone $0 \leq x \leq x_2$, la déformée $v(x)$ vérifie l'équation différentielle:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = Mf_z = M_2$$

On obtient alors successivement (les constantes d'intégration disparaissant du fait de l'encastrement en $x = 0$) :

$$\theta_z(x) = EI \frac{dv(x)}{dx} = M_2 x$$

$$v(x) = EIv(x) = M_2 \frac{x^2}{2}$$

d'où :

$$\text{au point (1) : } v_{12} = M_2 \frac{x_1^2}{2EI} \text{ et } \theta_{z12} = \theta_z(x_1) \cong \frac{dv(x_1)}{dx} = M_2 \frac{x_1}{EI}$$

$$\text{au point (2) : } v_{22} = M_2 \frac{x_2^2}{2EI} \text{ et } \theta_{z22} = \theta_z(x_2) \cong \frac{dv(x_2)}{dx} = M_2 \frac{x_2}{EI}$$

- ♦ application du principe de superposition des effets
les déplacements totaux s'écrivent :

$$v_1 = v_{11} + v_{12} = F_1 \frac{x_1^3}{3EI} + M_2 \frac{x_1^2}{2EI} \text{ et } \theta_{z1} = \theta_{z11} + \theta_{z12} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} + M_2 \frac{x_1}{EI}$$

$$v_2 = v_{21} + v_{22} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} \left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right) + M_2 \frac{x_2^2}{2EI} \text{ et } \theta_{z2} = \theta_{z21} + \theta_{z22} = F_1 \frac{x_1^2}{2EI} + M_2 \frac{x_2}{EI}$$