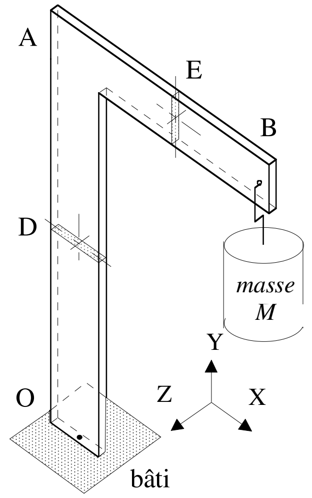
ELEMENTS DE REDUCTION DU TORSEUR DE COHESION - POTENCE

1 OBJECTIFS

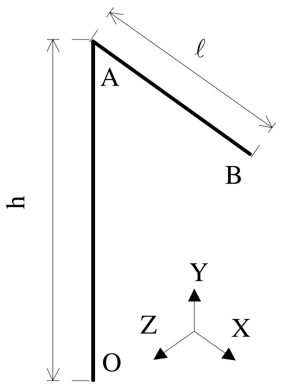
L'exemple qui suit a pour but de bien détailler la manière d'évaluer le torseur de cohésion sur une coupure ménagée ici sur une structure constituée de poutres droites.

On considère une potence en liaison encastrement avec un bâti, chargée en son extrémité libre et on souhaite écrire :

- les éléments de réduction du torseur d'actions mécaniques transmissibles par la liaison encastrement;
- les éléments de réduction du torseur de cohésion en toute section droite de chacune des deux poutres constituant la potence



a) Structure réelle



b) Tracé des lignes moyennes des poutres (modèle de calcul).

2 ETUDE STATIQUE PRELIMINAIRE

On se propose de calculer le torseur des actions mécaniques transmissibles du bâti sur la potence réduites au point O, dans la section de centre O siège de la liaison encastrement, et ce à partir du modèle de la figure b). On utilise pour cela un repère $R(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ valable pour la structure entière, dit aussi "repère global" ou "repère structural".

⇨ Système isolé : la potence

⇨ Bilan des actions mécaniques :

- le torseur des actions mécaniques exercées au point B se réduit en B à :

$$\left\{\mathcal{F}_{\text{poids/potence}}\right\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = Y_B\,\vec{Y} = -Mg\vec{Y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{B,R}$$

où $\vec{B}$ modélise l'action du crochet de la masse M sur la potence apparaissant sur la figure a).

- le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison encastrement se réduit en O à :

$$\left\{\mathcal{F}_{\text{bati/potence}}\right\}_O = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_O} = X_O\vec{X} + Y_O\vec{Y} + Z_O\vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = L_O\vec{X} + M_O\vec{Y} + N_O\vec{Z} \end{Bmatrix}_{O,R}$$

soit au total : 6 inconnues algébriques.

⇨ Résolution :

- sur la potence isolée appliquons le principe fondamental de la statique avec AB = ℓ et OA = h.

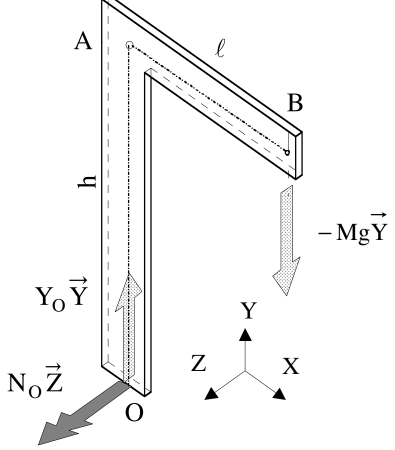
$$\left\{\mathcal{F}_{\text{bati/potence}}\right\}_O + \left\{\mathcal{F}_{\text{poids/potence}}\right\}_O \equiv \{0\}$$

- correspondant aux 2 équations vectorielles :

$$X_O\vec{X} + Y_O\vec{Y} + Z_O\vec{Z} - Mg\vec{Y} = \vec{0}$$

$$L_O\vec{X} + M_O\vec{Y} + N_O\vec{Z} + \overrightarrow{OB} \wedge -Mg\vec{Y} = \vec{0}$$

Potence en équilibre



On obtient ainsi les valeurs des composantes du torseur transmissible en O du bâti sur la potence qui se réduit à :

$$\left\{\mathcal{F}_{\text{bati / potence}}\right\}_O = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_O} = Y_O\vec{Y} = Mg\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = N_O\vec{Z} = \ell Mg\vec{Z} \end{Bmatrix}_{O,R}$$

3 TORSEUR DE COHESION EN TOUTE SECTION DROITE

REMARQUE PREALABLE

❒ Repère local et repère global

Sur la figure précédente le repère global $R(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$, ou structural, est unique pour la structure considérée (potence). Or cette dernière est constituée de deux tronçons de poutre à angle droit en liaison encastrement en A. Si on lie, selon la méthode habituelle d'étude des poutres, un repère $r(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ respectivement à chacun des tronçons (un des axes, $\vec{x}$ par exemple, étant la ligne moyenne du tronçon, les deux autres étant les axes principaux de la section, ici rectangulaire), on dit que l'on affecte au tronçon de poutre considéré un repère local (ou repère propre).

3.1 Etude du tronçon de poutre horizontal AB

On se propose de calculer le torseur de cohésion dans la section courante E .

Isolons la partie OAE.

⇨ dans le repère global :

Calculons les éléments de réduction en E des actions mécaniques extérieures appliquées au tronçon EB exprimés dans le repère global $R(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$:

- calcul du torseur de $\{\mathcal{F}_{\text{ext/EB}}\}_E$:

$$\{\mathcal{F}_{\text{ext/EB}}\}_E = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_E} = Y_E\vec{Y} = \text{-Mg}\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_E} = \overrightarrow{EB} \wedge \text{-Mg}\vec{Y} \end{Bmatrix}_{E,R}$$

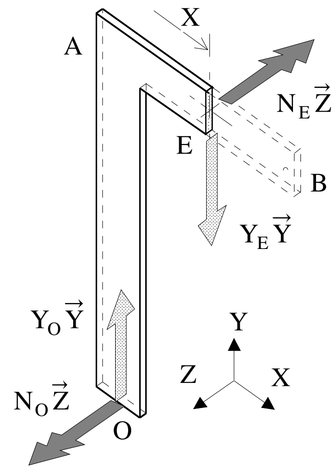
avec $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OE} = (x_B - x_E)\vec{X} + (y_B - y_E)\vec{Y} = (\ell - X)\vec{X}$ on obtient :

$$\{\mathcal{F}_{\text{ext/EB}}\}_E = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_E} = Y_E\vec{Y} = \text{-Mg}\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_E} = N_E\vec{Z} = -(\ell - X)\text{Mg}\vec{Z} \end{Bmatrix}_{E,R}$$

d'après la définition du torseur de cohésion on obtient avec partie conservée OE et partie supprimée EB :

$\{\mathcal{Coh}_{\text{EB/OE}}\}_E = \{\mathcal{F}_{\text{ext/EB}}\}_E$

on peut aussi écrire $\{\mathcal{Coh}_{\text{EB/OE}}\}_E = -\{\mathcal{F}_{\text{ext/OE}}\}_E$.



Tronçon OAE en équilibre

⇨ dans le repère local :

Calculons les actions exercées par la partie EB sur la partie AE exprimées dans le repère local $r(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à la partie restante AE.

On connaît les éléments de réduction de $\{\mathcal{F}_{\text{ext/EB}}\}_E$ exprimés dans le repère global $R(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. On remarque qu'on peut facilement les exprimer dans le repère local $r(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On note en effet $\vec{X} = \vec{x}$, $\vec{Y} = \vec{y}$, $\vec{Z} = \vec{z}$, soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}$$

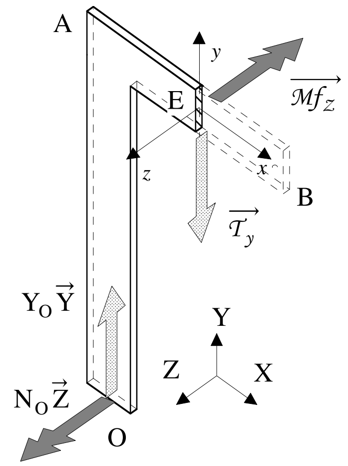
On vu : $\{\mathcal{Coh}_{\text{EB/OE}}\}_E = \{\mathcal{F}_{\text{ext/EB}}\}_E = \begin{Bmatrix} -\text{Mg}\vec{y} \\ -(\ell - X)\text{Mg}\vec{z} \end{Bmatrix}_{E,\,r}$

Or dans le repère local, le torseur de cohésion a la forme rappelée ici :

$$\{\mathcal{Coh}_{\text{EB/OE}}\}_E = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{EB/OE}}} = \mathcal{N}_x\vec{x} + \mathcal{T}_y\vec{y} + \mathcal{T}_z\vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{E(EB/OE)}}} = \mathcal{M}_x\vec{x} + \mathcal{M}f_y\vec{y} + \mathcal{M}f_z\vec{z} \end{Bmatrix}_{E,\,r}$$

d'où par comparaison avec son expression en fonction des efforts extérieurs appliqués su EB :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_x = 0 \\ \mathcal{T}_y = -\text{Mg} \\ \mathcal{T}_z = 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \mathcal{M}_x = 0 \\ \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{M}f_z = -(\ell - X)\text{Mg} \end{bmatrix}$$



Torseur de cohésion en E sur la partie OAE

Les seuls éléments de réduction non nuls sont ici :

$\mathcal{T}_y$: effort tranchant suivant $\vec{y}$;

$\mathcal{M}f_z$: moment de flexion autour $\vec{z}$.

❒ ***REMARQUE***

Dans ce qui précède, on a isolé la partie AE de la poutre AB. Alors le repère local $r(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est défini à partir de la normale sortante en E de la partie isolée AE, (axe $\vec{x}$). On peut ensuite choisir l'emplacement des axes principaux $\vec{y}$ et $\vec{z}$, de façon que le trièdre demeure direct.

Si l'on désire plutôt isoler la partie EB, la même démarche devra s'appliquer pour la définition du repère local, avec une normale sortante en E de la partie EB, soit l'axe $\vec{x}'$, où l'on a aussi fixé les axes $\vec{y}'$ et $\vec{z}'$.

Calculons dans ces conditions les actions de la partie OE sur la partie EB exprimées dans le repère local $r'(\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}')$:

$$\{\mathcal{Coh}_{OE/EB}\}_E = \{\mathcal{F}_{ext/OE}\}_E \text{ ou } \{\mathcal{Coh}_{OE/EB}\}_E = -\{\mathcal{F}_{ext/EB}\}_E ;$$

$\{\mathcal{F}_{ext/EB}\}_E$ est toujours exprimé de la même façon. On remarque de plus que $\vec{X} = -\vec{x}'$, $\vec{Y} = -\vec{y}'$, $\vec{Z} = \vec{z}'$, soit sous forme matricielle :

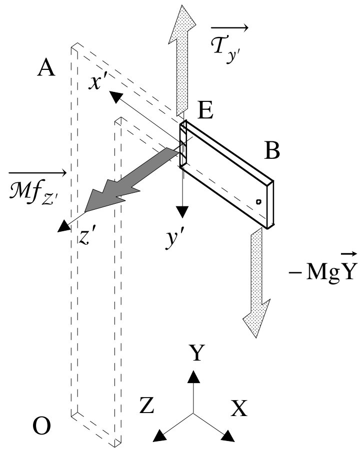
$$\begin{Bmatrix}\vec{X}\\ \vec{Y}\\ \vec{Z}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix}\vec{x}'\\ \vec{y}'\\ \vec{z}'\end{Bmatrix}$$

D'où en utilisant la propriété :

$$\{\mathcal{Coh}_{OE/EB}\}_E = -\{\mathcal{F}_{ext/EB}\}_E = \begin{Bmatrix}-\mathrm{Mg}\,\vec{y}'\\ (\ell - \mathrm{X})\mathrm{Mg}\,\vec{z}'\end{Bmatrix}_{E,\,r'}$$

Or dans le repère local, le torseur de cohésion prend la forme rappelée ici :

$$\{\mathcal{Coh}_{OE/EB}\}_E = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{\mathcal{R}_{OE/EB}} = \mathcal{N}_{x'}\,\vec{x}' + \mathcal{T}_{y'}\,\vec{y}' + \mathcal{T}_{z'}\,\vec{z}'\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{E(OE/EB)}} = \mathcal{M}_{x'}\,\vec{x}' + \mathcal{M}f_{y'}\,\vec{y}' + \mathcal{M}f_{z'}\,\vec{z}'\end{Bmatrix}_{E,\,r'}$$



Torseur de cohésion en E sur la partie EB

d'où par comparaison avec son expression en fonction des efforts extérieurs appliqués su EB :

$$\begin{cases}\mathcal{N}_{x'} = 0\\ \mathcal{T}_{y'} = -\mathrm{Mg}\\ \mathcal{T}_{z'} = 0\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\mathcal{M}_{x'} = 0\\ \mathcal{M}f_{y'} = 0\\ \mathcal{M}f_{z'} = (\ell - \mathrm{X})\mathrm{Mg}\end{cases}$$

Les éléments de réduction non nuls sont ici :

$\mathcal{T}_{y'}$: effort tranchant suivant $\vec{y}'$;

$\mathcal{M}f_{z'}$: moment de flexion autour de $\vec{z}'$.

3.2 Etude du tronçon vertical OA

On considère la section courante D

Isolons la partie OD.

⇨ dans le repère global :

Calculons les éléments de réduction des actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur le tronçon DB exprimés dans le repère global $R(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$:

- calcul du torseur de $\{\mathcal{F}_{ext/DB}\}_D$:

$$\{\mathcal{F}_{ext/DB}\}_D = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{\mathcal{R}_D} = \mathrm{Y_D}\,\vec{Y} = -\mathrm{Mg}\,\vec{Y}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_D} = \overrightarrow{DB} \wedge -\mathrm{Mg}\,\vec{Y}\end{Bmatrix}_{D,\,R}$$

avec

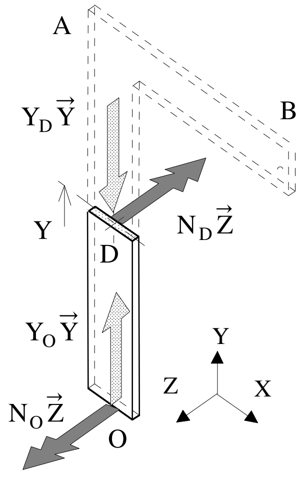
$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DE} = (x_B - x_D)\vec{X} + (y_B - y_D)\vec{Y} = \ell\vec{X} + (h - Y)\vec{Y}$$

on obtient : $\{\mathcal{F}_{ext/DB}\}_D = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{\mathcal{R}_D} = \mathrm{Y_D}\,\vec{Y} = -\mathrm{Mg}\,\vec{Y}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_D} = \mathrm{N_D}\,\vec{Z} = -\ell\mathrm{Mg}\,\vec{Z}\end{Bmatrix}_{D,\,R}$

on peut alors écrire pour le torseur de cohésion avec partie conservée OD et partie supprimée DB:

$$\{\mathcal{Coh}_{DB/OD}\}_D = \{\mathcal{F}_{ext/DB}\}_D$$

on peut écrire aussi : $\{\mathcal{Coh}_{DB/OD}\}_D = -\{\mathcal{F}_{ext/OD}\}_D$.



Tronçon OD en équilibre

⇨ dans le repère local :

On connaît les éléments de réduction exprimés dans le repère global. On remarque qu'ici on peut facilement les exprimer dans le repère local $r(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ qui a été tracé sur la figure. On a en effet $\vec{X}=-\vec{y}$, $\vec{Y}=\vec{x}$, $\vec{Z}=\vec{z}$, soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix}\vec{X}\\ \vec{Y}\\ \vec{Z}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}\vec{x}\\ \vec{y}\\ \vec{z}\end{Bmatrix}$$

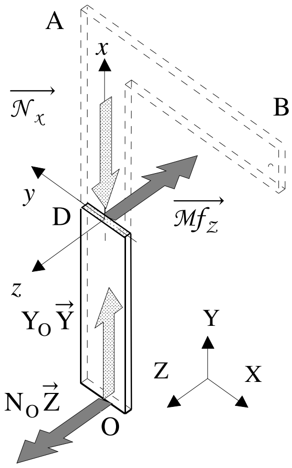
On peut écrire : $\{\mathcal{Coh}_{\mathrm{DB/OD}}\}_{\mathrm{D}}=\{\mathcal{F}_{\mathrm{ext/DB}}\}_{\mathrm{D}}=\begin{Bmatrix}-\mathrm{Mg}\vec{x}\\ -\mathrm{Mg}\ell\vec{z}\end{Bmatrix}_{\mathrm{D},r}$

Or dans le repère local, le torseur de cohésion a la forme rappelée ici :

$$\{\mathcal{Coh}_{\mathrm{DB/OD}}\}_{\mathrm{D}}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\mathcal{R}_{\mathrm{DB/OD}}}=\mathcal{N}_x\,\vec{x}+\mathcal{T}_y\,\vec{y}+\mathcal{T}_z\,\vec{z}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{D(DB/OD)}}}=\mathcal{M}_x\,\vec{x}+\mathcal{M}f_y\,\vec{y}+\mathcal{M}f_z\,\vec{z}\end{Bmatrix}_{\mathrm{D},r}$$

d'où par comparaison avec son expression en fonction des efforts extérieurs appliqués su DB :

$$\begin{cases}\mathcal{N}_x=-\mathrm{Mg}\\ \mathcal{T}_y=0\\ \mathcal{T}_z=0\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}\mathcal{M}_x=0\\ \mathcal{M}f_y=0\\ \mathcal{M}f_z=-\mathrm{Mg}\ell\end{cases}$$



Torseur de cohésion en D du tronçon OD

Les seuls éléments de réduction non nuls sont ici :

$\mathcal{N}_x$: effort normal suivant $\vec{x}$;

$\mathcal{M}f_z$: moment de flexion autour de $\vec{z}$.

❒ ***REMARQUE***

Dans ce qui précède, on a isolé la partie OD de la poutre verticale OA. Alors le repère local $r(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est défini à partir de la normale sortante en D de la partie isolée OD; (axe $\vec{x}$). On peut ensuite choisir l'emplacement des axes principaux $\vec{y}$ et $\vec{z}$, pourvu que le trièdre demeure direct.

Si l'on désire plutôt isoler la partie DAB, la même démarche devra s'appliquer pour la définition du repère local, avec une normale sortante en D de la partie AD, soit l'axe $\vec{x}'$ où l'on a aussi fixé les axes $\vec{y}'$ et $\vec{z}'$ liés à la section en D.

Calculons dans ces conditions les actions de la partie supprimée OD sur la partie conservée DAB exprimées dans le repère local $r'(\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}')$:

$\{\mathcal{Coh}_{\mathrm{OD/DB}}\}_{\mathrm{D}}=\{\mathcal{F}_{\mathrm{ext/OD}}\}_{\mathrm{D}}$ ou $\{\mathcal{Coh}_{\mathrm{OD/DB}}\}_{\mathrm{D}}=-\{\mathcal{F}_{\mathrm{ext/DB}}\}_{\mathrm{D}}$;

$\{\mathcal{F}_{\mathrm{ext/DB}}\}_{\mathrm{D}}$ a toujours la même expression. On remarque de plus que $\vec{X}=\vec{y}'$, $\vec{Y}=-\vec{x}'$, $\vec{Z}=\vec{z}'$, soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix}\vec{X}\\ \vec{Y}\\ \vec{Z}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}\vec{x}'\\ \vec{y}'\\ \vec{z}'\end{Bmatrix}$$

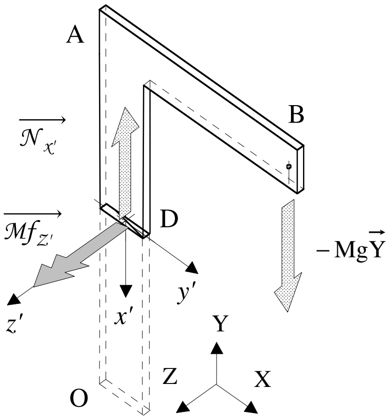
On peut écrire : $\{\mathcal{Coh}_{\mathrm{OD/DAB}}\}_{\mathrm{D}}=-\{\mathcal{F}_{\mathrm{ext/DB}}\}_{\mathrm{D}}=\begin{Bmatrix}-\mathrm{Mg}\vec{x}'\\ \mathrm{Mg}\ell\vec{z}'\end{Bmatrix}_{\mathrm{D},r'}$

Or dans le repère local, le torseur de cohésion prend la forme rappelée ici :

$$\{\mathcal{Coh}_{\mathrm{OD/DAB}}\}_{\mathrm{D}}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\mathcal{R}_{\mathrm{OD/DAB}}}=\mathcal{N}_{x'}\,\vec{x}'+\mathcal{T}_{y'}\,\vec{y}'+\mathcal{T}_{z'}\,\vec{z}'\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{D(OD/DAB)}}}=\mathcal{M}t_{x'}\,\vec{x}'+\mathcal{M}f_{y'}\,\vec{y}'+\mathcal{M}f_{z'}\,\vec{z}'\end{Bmatrix}_{\mathrm{D},r'}$$

d'où par comparaison avec son expression en fonction des efforts extérieurs appliqués su DB :

$$\begin{cases}\mathcal{N}_{x'}=-\mathrm{Mg}\\ \mathcal{T}_{y'}=0\\ \mathcal{T}_{z'}=0\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}\mathcal{M}_{x'}=0\\ \mathcal{M}f_{y'}=0\\ \mathcal{M}f_{z'}=\mathrm{Mg}\ell\end{cases}$$



Torseur de cohésion en D sur le tronçon DAB

Les seuls éléments de réduction non nuls sont :

$\mathcal{N}_{x'}$: effort normal suivant $\vec{x}'$;

$\mathcal{M}f_{z'}$: moment de flexion autour de $\vec{z}'$.