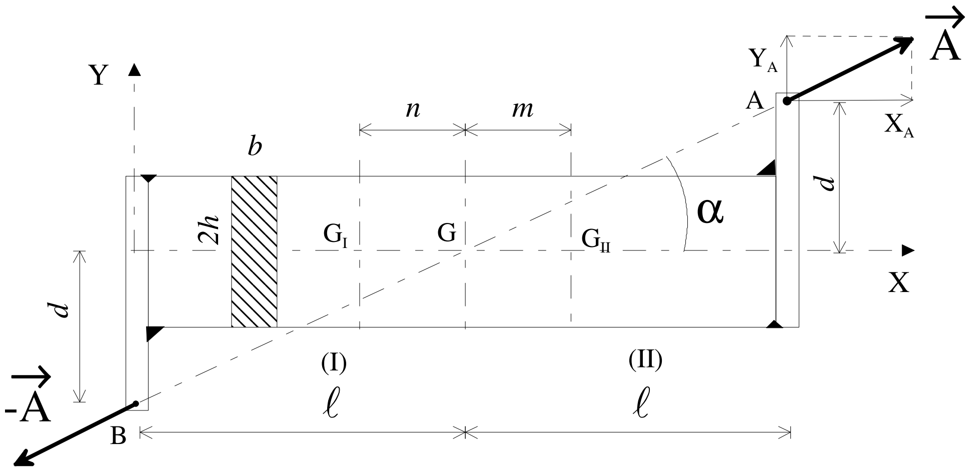
DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES

EXERCICE DE PERFECTIONNEMENT SUR LES BASES DU COMPORTEMENT ELASTIQUE

ex-plaque.doc/ version du 16/11/2010/JG

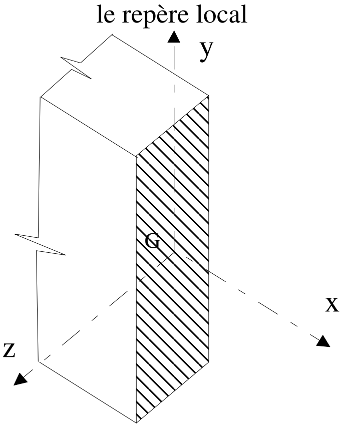
ELEMENTS DE REDUCTION DU TORSEUR DE COHESION : PLAQUE

Soit l'élément de structure ci-joint, représenté dans sa configuration d'équilibre.



❑ Calculer les éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G de la section pour l'abscisse x= ℓ (partie I conservée, partie II supprimée) conclure.

❑ Tracer la représentation vectorielle de ces éléments de réduction exprimés dans le repère local



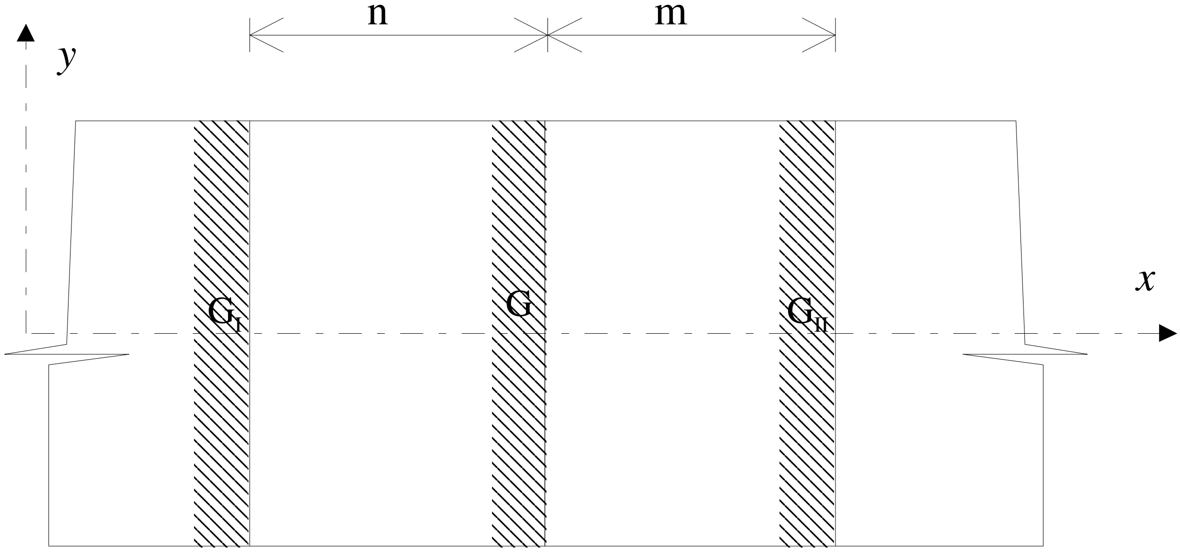
❑ Calculer les éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique de la section :

- pour l'abscisse x= (ℓ - n)
- pour l'abscisse x= (ℓ +m)

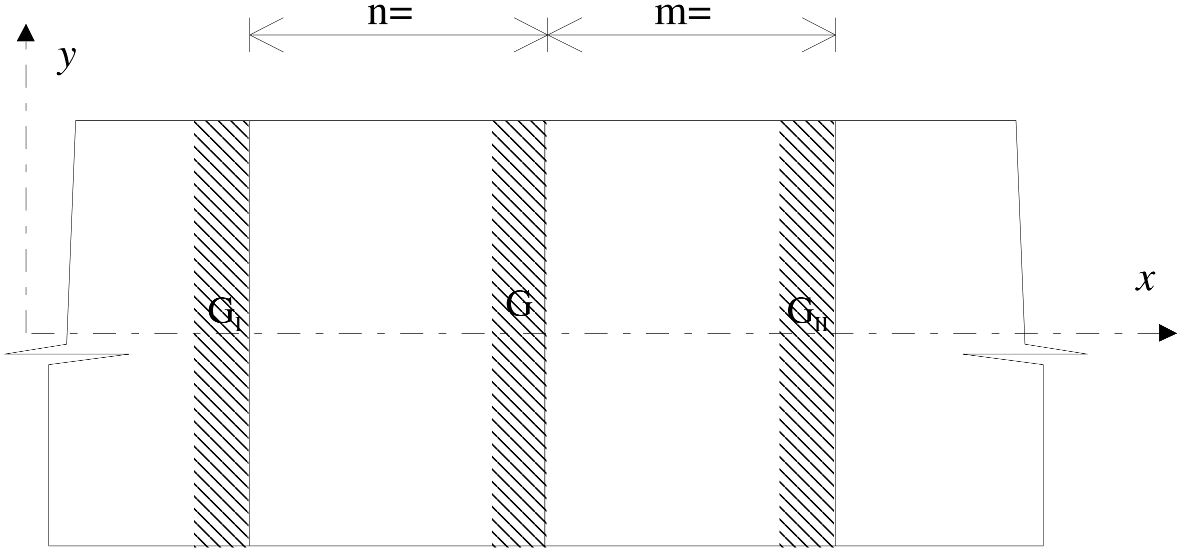
❑ Calculer les valeurs de "m" et "n" pour lesquelles la contrainte normale est nulle sur les faces externes de la poutre (fibres d'ordonnée y = h ou y = -h).

❑ Pour ces nouvelles abscisses ainsi que pour l'abscisse ℓ.

- tracer la représentation vectorielle de ces éléments de réduction



- en utilisant les résultats de la théorie des poutres, tracer les répartitions des contraintes normales dans les sections



ELEMENTS DE CORRECTION

❑ Calculer les éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G de la section pour l'abscisse x= ℓ, (partie I conservée, partie II supprimée), conclure.

Repère global (R : XYZ) identique au repère local (r : xyz) d'une section droite

Partie « conservée » (I) ($0 \le x \le \ell$)

$$\{\mathcal{F}_{\text{ext/II}}\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{ext/II}}} = \vec{A} = X_A\ \vec{X} + Y_A\ \vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G(\text{ext/II})}} = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{A} \end{Bmatrix}_{G,\,R}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\|\vec{A}\|\sin\alpha}{\|\vec{A}\|\cos\alpha} = \frac{Y_A}{X_A} = \frac{d}{\ell} \Rightarrow \ell \times Y_A = d \times X_A$$

$$\overrightarrow{GA} \wedge \vec{A} = \begin{Bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ \ell & d & 0 \\ X_A & Y_A & 0 \end{Bmatrix} = (\ell \times Y_A - d \times X_A)\vec{Z} = \vec{0}$$ ☺

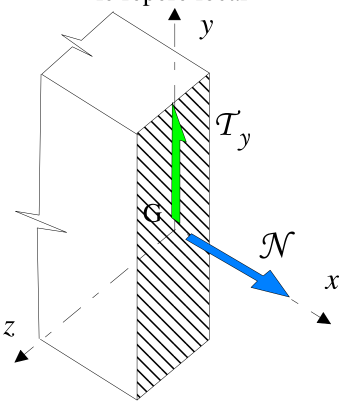
$$\{\mathcal{Coh}_{\text{II/I}}\}_G = \{\mathcal{F}_{\text{ext/II}}\}_G$$

$$\{\mathcal{Coh}_{\text{II/I}}\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{II/I}}} = \mathcal{N}\ \vec{x} + \mathcal{T}_y\ \vec{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G(\text{II/I})}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{G,\,r}$$

Eléments de réduction du torseur de cohésion de II/I au point G

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{N} = X_A \\ \mathcal{T}_y = Y_A \end{Bmatrix}_{G,\,r}$$

❑ Tracer la représentation vectorielle de ces éléments de réduction exprimés dans le repère local



❑ Calculer les éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique de la section :

◆ pour l'abscisse x= (ℓ - n)

Partie « conservée » (I-n) $\Rightarrow$ ($0 \le x \le \ell - n$)

$$\{\mathcal{F}_{\text{ext/II+n}}\}_{G_I} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{ext/II+n}}} = \vec{A} = X_A\ \vec{X} + Y_A\ \vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G_I(\text{ext/II+n})}} = \overrightarrow{G_I A} \wedge \vec{A} \end{Bmatrix}_{G_I,\,R}$$

on pose $\overrightarrow{G_I A} = \overrightarrow{G_I G} + \overrightarrow{GA} = n\vec{X} + \ell\vec{X}$

$$\overrightarrow{G_I A} \wedge \vec{A} = \begin{Bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ n+\ell & d & 0 \\ X_A & Y_A & 0 \end{Bmatrix} = n \times Y_A\ \vec{Z}$$

$$\{\mathcal{Coh}_{\text{II+n/I-n}}\}_{G_I} = \{\mathcal{F}_{\text{ext/II+n}}\}_{G_I}$$

$$\{\mathcal{Coh}_{\text{II+n/I-n}}\}_{G_I} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{II+n/I-n}}} = \mathcal{N}\ \vec{x} + \mathcal{T}_y\ \vec{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G_I(\text{II+n/I-n})}} = \mathcal{M}f_z\ \vec{z} \end{Bmatrix}_{G_I,\,r}$$

Eléments de réduction du torseur de cohésion de (II+n)/(I-n) au point G_I :

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{N} = X_A > 0 \\ \mathcal{T}_y = Y_A > 0 \\ \mathcal{M}f_z = n \times Y_A > 0 \end{Bmatrix}_{G_I,\,r}$$

◆ pour l'abscisse x= (ℓ +m)

Partie « conservée » (I+m) $\Rightarrow$ ($0 \le x \le \ell + m$)

$$\{\mathcal{F}_{\text{ext/II-m}}\}_{G_{II}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{ext/II-m}}} = \vec{A} = X_A\ \vec{X} + Y_A\ \vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G_{II}(\text{ext/II-m})}} = \overrightarrow{G_{II} A} \wedge \vec{A} \end{Bmatrix}_{G_{II},\,R}$$

on pose $\overrightarrow{G_{II} A} = \overrightarrow{G_{II} G} + \overrightarrow{GA} = -m\vec{X} + \ell\vec{X}$

$$\overrightarrow{G_{II} A} \wedge \vec{A} = \begin{Bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ \ell - m & d & 0 \\ X_A & Y_A & 0 \end{Bmatrix} = -m \times Y_A\ \vec{Z}$$

$$\{\mathcal{Coh}_{\text{II-m/I+m}}\}_{G_{II}} = \{\mathcal{F}_{\text{ext/II-m}}\}_{G_{II}}$$

$$\{\mathcal{Coh}_{\text{II-m/I+m}}\}_{G_{II}} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{\text{II-m/I+m}}} = \mathcal{N}\ \vec{x} + \mathcal{T}_y\ \vec{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G"(\text{II-m/I+m})}} = \mathcal{M}f_z\ \vec{z} \end{Bmatrix}_{G_{II},\,r}$$

Eléments de réduction du torseur de cohésion de (II-m)/(I+m) au point G_{II} :

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{N} = X_A > 0 \\ \mathcal{T}_y = Y_A > 0 \\ \mathcal{M}f_z = -m \times Y_A < 0 \end{Bmatrix}_{G_{II},\,r}$$

❑ Calculer les valeurs des scalaires "m" et "n" pour lesquelles la contrainte normale est nulle sur les faces externes de la poutre (fibres d'ordonnée y = h ou y = -h).

Rappels des relations algébriques : $\sigma_{x\mathcal{N}} = \dfrac{\mathcal{N}}{S}$ et $\sigma_{x\mathcal{M}f_z} = -\dfrac{\mathcal{M}f_z \times h}{I_z}$, pour une abscisse x on a donc $\sigma_x = \sigma_{x\mathcal{N}} + \sigma_{x\mathcal{M}f_z}$

- pour x=ℓ-n $\Rightarrow$ on pose $\sigma_x = \sigma_{x\mathcal{N}} + \sigma_{x\mathcal{M}f_z} = 0$

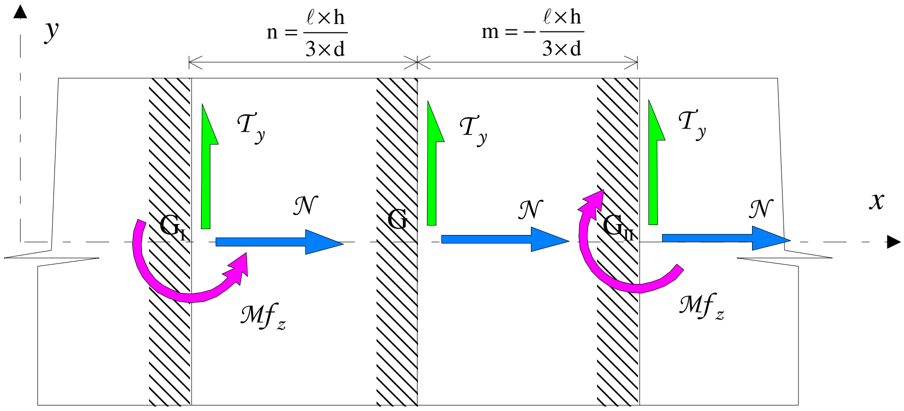
$$\frac{\mathcal{N}}{S} - \frac{\mathcal{M}f_z \times h}{I_z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X_A}{b \times 2h} = \frac{n \times Y_A \times h}{\dfrac{b \times 8h^3}{12}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ell \times h}{3 \times d} \text{ (h>0 point N)}$$

- pour x=ℓ+m $\Rightarrow$ on pose $\sigma_x = \sigma_{x\mathcal{N}} + \sigma_{x\mathcal{M}f_z} = 0$

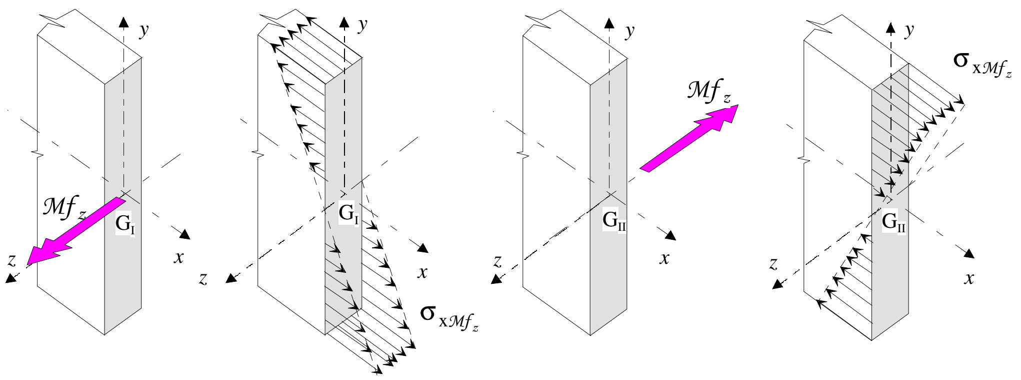
$$\frac{\mathcal{N}}{S} - \frac{\mathcal{M}f_z \times h}{I_z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X_A}{b \times 2h} = \frac{-m \times Y_A \times h}{\dfrac{b \times 8h^3}{12}} \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{\ell \times h}{3 \times d} \text{ (h<0 point M)}$$

❑ Pour ces nouvelles abscisses ainsi que pour l'abscisse ℓ.

- tracer la représentation vectorielle de ces éléments de réduction



Rappels :



- tracer les répartitions des contraintes normales dans les sections