ELEMENTS DE REDUCTION DU TORSEUR DE COHESION : PIGNON ARBRE EN LIAISON PIVOT

❑ Un pignon arbré 2 en liaison pivot par rapport à un palier 1 reçoit de la puissance mécanique par l'intermédiaire d'une roue dentée (engrenage à denture hélicoïdale) non représentée (contact A). Il la restitue à un organe récepteur grâce à un accouplement au point B

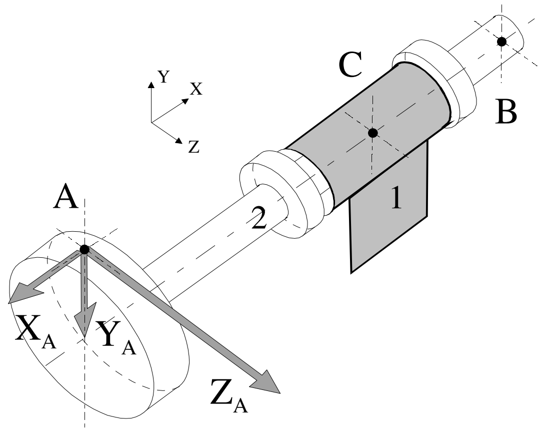
◆ données:

- l'action mécanique motrice **connue** en A de la roue dentée sur le pignon arbré 2 est modélisée par le torseur des efforts transmissibles :

$$\{\mathcal{F}_{roue/2}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{A} = X_A\vec{X} + Y_A\vec{Y} + Z_A\vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{A,R}$$

avec pour composantes axiale $X_A<0$, radiale $Y_A<0$ et tangentielle $Z_A>0$

- l'action mécanique inconnue en B de l'accouplement de l'arbre récepteur sur le pignon arbré 2 est modélisée par le torseur des efforts transmissibles $\{\mathcal{F}_{recept/2}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = L_B\vec{X} \end{Bmatrix}_{B,R}$

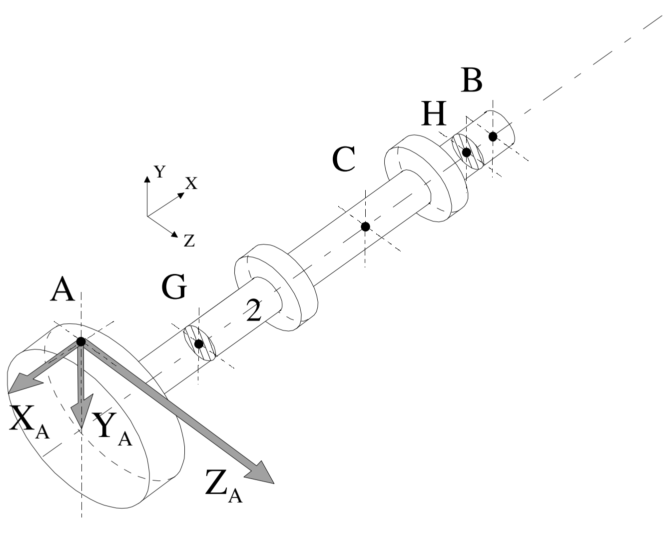


❑ Travail demandé :

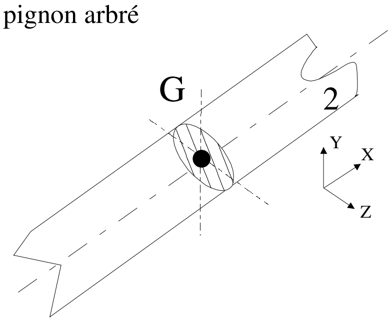
◆ donner l'expression générale du torseur des efforts transmissibles en C de la liaison pivot (action du palier 1 sur le pignon arbré 2) dans le repère global XYZ :

◆ formuler succinctement les trois étapes pour déterminer les composantes inconnues des torseurs :

◆ calculer littéralement les forces et des moments inconnus, préciser les signes de leurs composantes algébriques, en donner une représentation graphique sur la figure ci-contre et en vérifier ensuite la cohérence mécanique



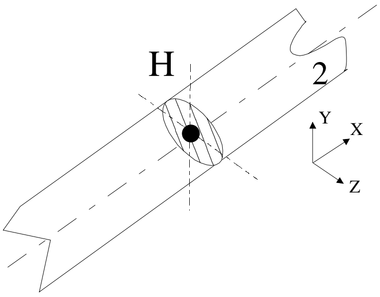
◆ dans la section droite de centre géométrique G située entre la projection du point A sur l’axe de l’arbre et le point C, donner l'expression qualitative du torseur des efforts cohésion, en donner une représentation graphique sur la figure ci-dessous, après avoir dessiné le repère local *r (Gxyz)* et ombré la partie conservée du pignon arbré



◆ en utilisant les résultats de la théorie des poutres, donner ci-dessous le nom de chaque élément de réduction ainsi que les contraintes engendrées

désignation	nom	contraintes

◆ dans la section droite de centre géométrique H située entre C et B, donner l'expression qualitative du torseur des efforts cohésion, en donner une représentation graphique sur la figure ci-dessous, après avoir dessiné le repère local *r (Hxyz)* et ombré la partie conservée du pignon arbré



CORRECTION

- torseur des efforts transmissibles au centre géométrique C de la liaison pivot

$$\{\mathcal{F}_{1/2}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C} = X_C\vec{X} + Y_C\vec{Y} + Z_C\vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = M_C\vec{Y} + N_C\vec{Z} \end{Bmatrix}_{C,R}$$

- système isolé : pignon arbré 2
- bilan des actions mécaniques extérieures

$$\{\mathcal{F}_{roue/2}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{A} = X_A\vec{X} + Y_A\vec{Y} + Z_A\vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{A,R} \quad \{\mathcal{F}_{1/2}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C} = X_C\vec{X} + Y_C\vec{Y} + Z_C\vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = M_C\vec{Y} + N_C\vec{Z} \end{Bmatrix}_{C,R} \quad \{\mathcal{F}_{recept/2}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = L_B\vec{X} \end{Bmatrix}_{B,R}$$

6 inconnues algébriques (donc nécessité d'avoir 6 équations)

- application du principe fondamental de la statique

$$\sum \overrightarrow{(F_{ext})} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$$

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}(F_{ext})/_C} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_C} + \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \vec{0}$$

on pose

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (x_A\vec{X} + y_A\vec{Y} + z_A\vec{Z}) - (x_C\vec{X} + y_C\vec{Y} + z_C\vec{Z})$$
$$= (x_A - x_C)\vec{X} + (y_A - y_C)\vec{Y} = x_{CA}\vec{X} + y_{CA}\vec{Y}$$

avec $\overrightarrow{CA} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ x_{CA} & y_{CA} & 0 \\ X_A & Y_A & Z_A \end{bmatrix} = y_{CA} \times Z_A\vec{X} - x_{CA} \times Z_A\vec{Y} + (x_{CA} \times Y_A - y_{CA} \times X_A)\vec{Z}$

- 6 équations de projections pour déterminer les 6 inconnues algébriques

forces

$/X: \; X_A + X_C = 0 \;\Rightarrow X_C = -X_A$

$/Y: \; Y_A + Y_C = 0 \Rightarrow Y_C = -Y_A$

$/Z: \; Z_A + Z_C = 0 \Rightarrow Z_C = -Z_A$

moments

$/X: \; L_B + y_{CA} \times Z_A = 0 \;\Rightarrow L_B = -y_{CA} \times Z_A$

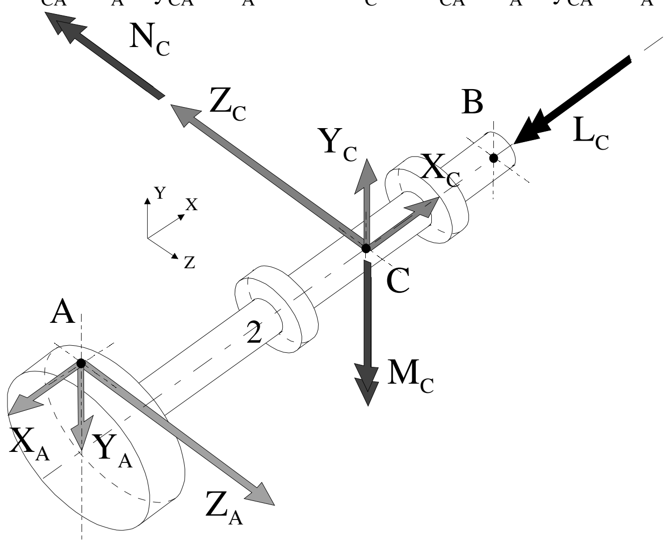
$/Y: \; M_C - x_{CA} \times Z_A = 0 \;\Rightarrow M_C = +x_{CA} \times Z_A$

$/Z: \; N_C + x_{CA} \times Y_A - y_{CA} \times X_A = 0 \Rightarrow N_C = -x_{CA} \times Y_A + y_{CA} \times X_A$

avec $x_{CA}<0$, $y_{CA}>0$, $X_A<0$, $Y_A<0$ et $Z_A>0$

⇨ **$X_C>0$; $Y_C>0$; $Z_C<0$; $L_B<0$; $M_C<0$; $N_C<0$**

(cohérence mécanique vérifiée)



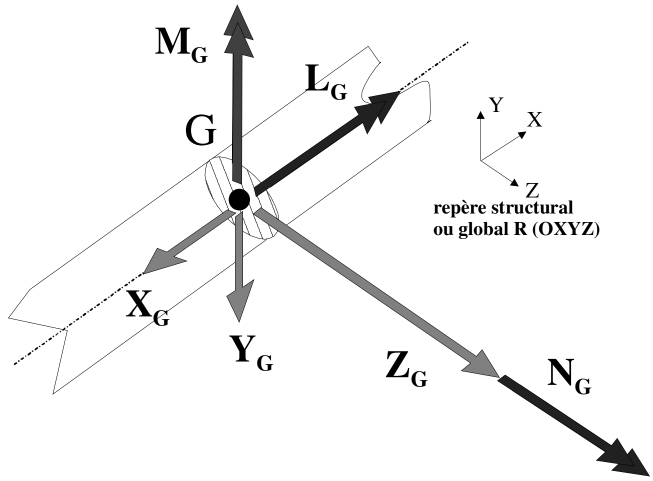
- torseur des efforts transmissibles de la roue sur le pignon réduit au centre géométrique G de la section circulaire

$$\{\mathcal{F}_{roue/pignon}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{G} = \vec{A} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G} = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{A} \end{Bmatrix}_{G,R}$$

on pose $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} = (x_A - x_G)\vec{X} + (y_A - y_G)\vec{Y} = x_{GA}\vec{X} + y_{GA}\vec{Y}$

avec $\overrightarrow{GA} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ x_{GA} & y_{GA} & 0 \\ X_A & Y_A & Z_A \end{bmatrix} = y_{GA} \times Z_A\vec{X} - x_{GA} \times Z_A\vec{Y} + (x_{GA} \times Y_A - y_{GA} \times X_A)\vec{Z}$

$$\{\mathcal{F}_{roue/pignon}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{G} = X_G\vec{X} + Y_G\vec{Y} + Z_G\vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G} = L_G\vec{X} + M_G\vec{Y} + N_G\vec{Z} \end{Bmatrix}_{G,R} = \begin{Bmatrix} \vec{G} = X_A\vec{X} + Y_A\vec{Y} + Z_A\vec{Z} = \vec{A} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G} = y_{GA} \times Z_A\vec{X} - x_{GA} \times Z_A\vec{Y} + (x_{GA} \times Y_A - y_{GA} \times X_A)\vec{Z} \end{Bmatrix}_{G,R}$$



- expression générale des éléments de réduction du torseur de cohésion en repère local

$$\left\{\mathcal{C}oh_{\text{sup/cons}}\right\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{G(\text{sup/cons})}} = \mathcal{N}_x\,\vec{x} + \mathcal{T}_y\,\vec{y} + \mathcal{T}_z\,\vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G(\text{sup/cons})}} = \mathcal{M}_t\,\vec{x} + \mathcal{M}f_y\,\vec{y} + \mathcal{M}f_z\,\vec{z} \end{Bmatrix}_{G,r}$$

- changement de base avec la matrice de passage du repère local r vers le repère global R

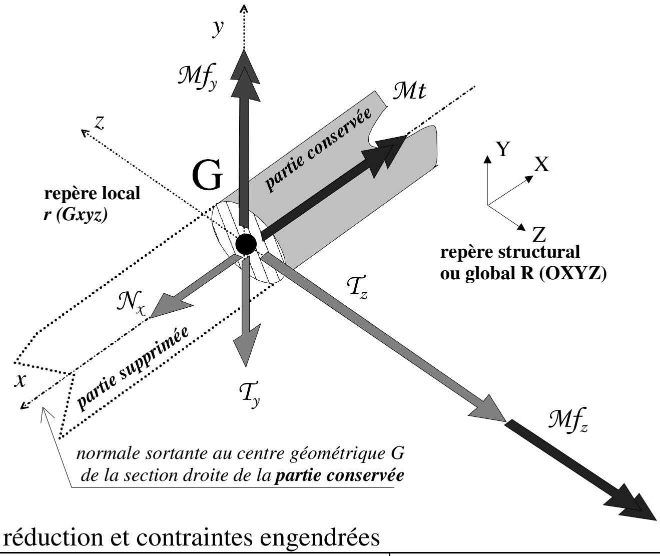
$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = -\vec{x} \\ \vec{Y} = \vec{y} \\ \vec{Z} = -\vec{z} \end{Bmatrix}$$

- après avoir exprimé dans le repère local $\left\{\mathcal{F}_{\text{roue/pignon}}\right\}_G$ (remplacer les vecteurs unitaires du repère global par leur expression en repère local) et sachant que $\left\{\mathcal{C}oh_{\text{sup/cons}}\right\}_G = \left\{\mathcal{F}_{\text{roue/pignon}}\right\}_G$:

$$\left\{\mathcal{C}oh_{\text{sup/cons}}\right\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{G(\text{sup/cons})}} = -X_A\,\vec{x} + Y_A\,\vec{y} - Z_A\,\vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G(\text{sup/cons})}} = -y_{GA} \times Z_A\,\vec{x} - x_{GA} \times Z_A\,\vec{y} + \left(-x_{GA} \times Y_A + y_{GA} \times X_A\right)\vec{z} \end{Bmatrix}_{G,r}$$

◆ éléments de réduction du torseur de cohésion au point G et dans le repère local r *(Gxyz)*

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{N}_x = -X_A & \mathcal{M}_t = -y_{GA} \times Z_A \\ \mathcal{T}_y = Y_A & \mathcal{M}f_y = -x_{GA} \times Z_A \\ \mathcal{T}_z = -Z_A & \mathcal{M}f_z = -x_{GA} \times Y_A + y_{GA} \times X_A \end{Bmatrix}_{G,r}$$



◆ nom de chaque élément de réduction et contraintes engendrées

désignation	nom	contraintes
$\mathcal{N}x$	effort normal suivant l'axe x	contraintes normales σ_x (traction $\sigma_x>0$)
$\mathcal{T}y$	effort tranchant suivant l'axe y	contraintes tangentielles τ_{xy} et τ_{xz} (cas d'une section circulaire)
$\mathcal{T}z$	effort tranchant suivant l'axe z	contraintes tangentielles τ_{xy} et τ_{xz} (cas d'une section circulaire)
$\mathcal{M}t$	moment de torsion autour de l'axe x	contraintes tangentielles τ $\left(\vec{\tau} = \tau_{xy}\,\vec{y} + \tau_{xz}\,\vec{z}\right)$
$\mathcal{M}fy$	moment de flexion autour de l'axe y	contraintes normales σ_x
$\mathcal{M}fz$	moment de flexion autour de l'axe z	contraintes normales σ_x

◆ éléments de réduction du torseur de cohésion au point H et dans le repère local *r (Hxyz)*

$$\left\{\mathcal{F}_{\text{recept}/2}\right\}_{\text{B}} = \left\{\begin{matrix} \vec{\text{B}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{\text{B}}} = \text{L}_{\text{B}}\,\vec{\text{X}} \end{matrix}\right\}_{\text{B, R}} \Rightarrow \left\{\mathcal{C}oh_{\text{sup/cons}}\right\}_{\text{H}} = \left\{\mathcal{F}_{\text{recept}/2}\right\}_{\text{H}}$$

$$\left\{\begin{matrix}\vec{\text{X}}\\ \vec{\text{Y}}\\ \vec{\text{Z}}\end{matrix}\right\}_{\text{R}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \bullet \left\{\begin{matrix}\vec{x}\\ \vec{y}\\ \vec{z}\end{matrix}\right\}_{r} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\vec{\text{X}} = \vec{x}\\ \vec{\text{Y}} = \vec{y}\\ \vec{\text{Z}} = \vec{z}\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\mathcal{N}_x = 0 & \mathcal{M}_t = \text{L}_{\text{B}}\\ \mathcal{T}_y = 0 & \mathcal{M}f_y = 0\\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z = 0\end{matrix}\right\}_{\text{H},r}$$