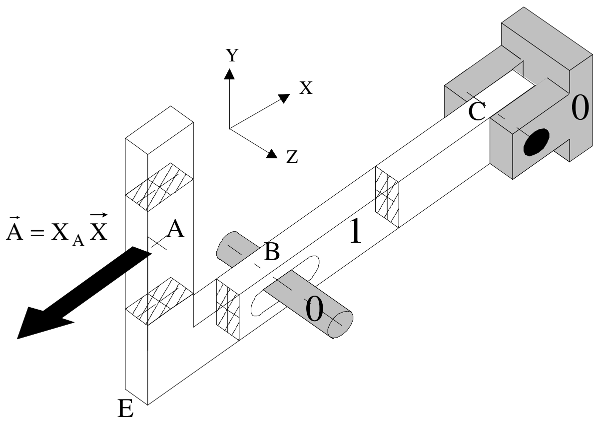
ELEMENTS DE REDUCTION DU TORSEUR DE COHESION : EQUERRE

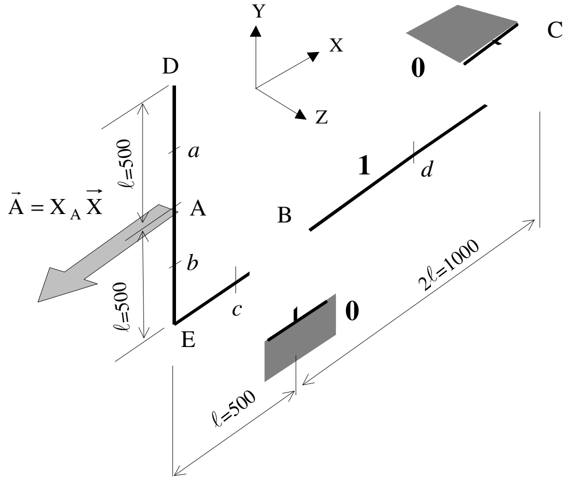
Un élément structural 1 mécanosoudé (acier S 235) d'un mécanisme est lié à un bâti 0 par une articulation à chape d'axe $\vec{Z}$ et par un doigt d'arrêt cylindrique d'axe $\vec{Z}$ à travers un trou oblong usiné dans I (liaisons parfaites). Structure dont le poids propre est négligé. Elle est sollicitée par un chargement extérieur appliqué au point A caractérisé par le torseur d'actions mécaniques transmissibles (unités : N et N.mm) :

$$\{\mathcal{F}_{ext/1}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{A} = -1000\vec{X} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{A,R}$$

structure réelle



modèle de calcul poutre **isostatique** à compléter



1. Si on affecte directement aux deux liaisons technologiques B et C les modèles de liaisons usuelles normalisées correspondantes, il en résulte un modèle de calcul **hyperstatique** pour cette structure. Pourquoi ?

2. Compléter alors le modèle de calcul poutre proposé afin qu'il soit **isostatique** tout en gardant son caractère articulé (noms et représentations des symboles des liaisons). Pour les liaisons modélisées en B et C, donner les expressions littérales **générales** des torseurs des actions mécaniques transmissibles (0)→ (1) dans le repère **global** R(XYZ),.

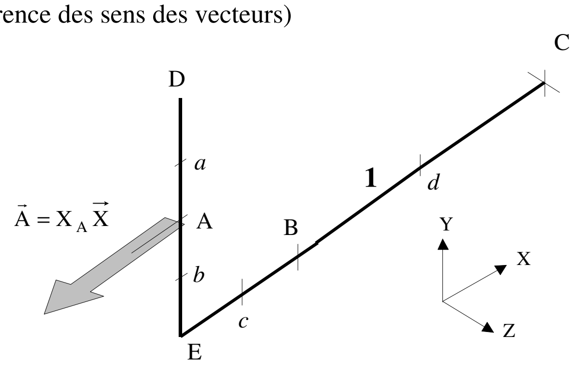
liaison B	liaison C

3. Calculer ces torseurs des actions mécaniques transmissibles, en précisant les étapes permettant de les calculer.

liaison B:

liaison C:

Sur le modèle de calcul poutre, donner la représentation vectorielle des éléments de réduction de ces 2 torseurs (vérifier la cohérence des sens des vecteurs)



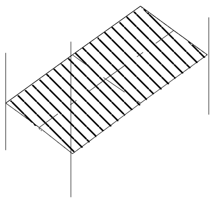
4. Donner l'expression **générale** d'un torseur de cohésion exprimé dans un repère **local** *r (xyz)*,

5. Dessiner ci-dessous les repères locaux sur les 4 sections représentées au centre de géométrique d'une section droite d'une poutre (trièdre direct avec: $\vec{x}$ normale sortante à la section droite de la partie conservée, $\vec{y}$ situé dans le plan de symétrie du modèle et $\vec{z} = \vec{Z}$)

Calculer les éléments de réduction de ce torseur de cohésion au centre de géométrique de chaque section droite hachurée, en donner une représentation vectorielles et en déduire la nature des sollicitations.

section (a): Aa=250

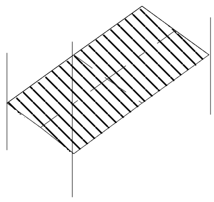
éléments de réduction du torseur de cohésion:



sollicitations:

section (b) : Ab=250

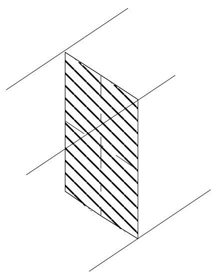
éléments de réduction du torseur de cohésion:



sollicitations:

section (c): Bc=250

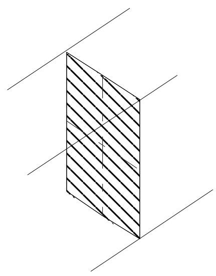
éléments de réduction du torseur de cohésion:



sollicitations:

*section (d):*Bd=500

éléments de réduction du torseur de cohésion:



sollicitations:

ELEMENTS DE CORRECTION

➔ liaisons usuelles modélisant les deux liaisons technologiques B et C

en B liaison linéaire rectiligne : $\{\mathcal{F}_{0/1}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = Y_B \vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = L_B \vec{X} \end{Bmatrix}_{B,R}$;

en C liaison pivot : $\{\mathcal{F}_{0/1}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C} = X_C \vec{X} + Y_C \vec{Y} + Z_C \vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = L_C \vec{X} + M_C \vec{Y} \end{Bmatrix}_{C,R}$

Ces modélisations entraînent 7 inconnues algébriques, donc système hyperstatique

➔ équerre isolée:

➔ bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé

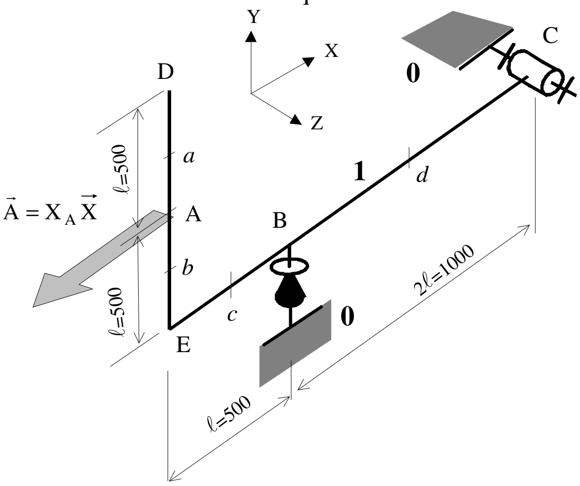
en A : $\{\mathcal{F}_{ext/I}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{A} = -1000\vec{X} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{A,R}$

en B liaison appui ponctuel : $\{\mathcal{F}_{0/1}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = Y_B \vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{B,R}$;

en C liaison pivot : $\{\mathcal{F}_{0/1}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C} = X_C \vec{X} + Y_C \vec{Y} + Z_C \vec{Z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = L_C \vec{X} + M_C \vec{Y} \end{Bmatrix}_{C,R}$

6 inconnues algébriques

➔ modèle de calcul isostatique



➔ application du principe fondamental de la statique

$$\sum \overrightarrow{(F_{ext})} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}(F_{ext})/_C} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{A} + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{B} + \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{CA} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ -1500 & 500 & 0 \\ -1000 & 0 & 0 \end{bmatrix} = +500000\vec{Z} \;;\; \overrightarrow{CB} \wedge \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ -1000 & 0 & 0 \\ 0 & Y_B & 0 \end{bmatrix} = -1000 Y_B \vec{Z}$$

➔ 6 équations de projections pour déterminer les 6 inconnues algébriques

forces

$/X:\ -1000 + X_C = 0 \ \Rightarrow X_C = 1000$

$/Y:\ Y_C + Y_B = 0$

$/Z:\ Z_C = 0$

moments

$/X:\ L_C = 0$

$/Y:\ M_C = 0$

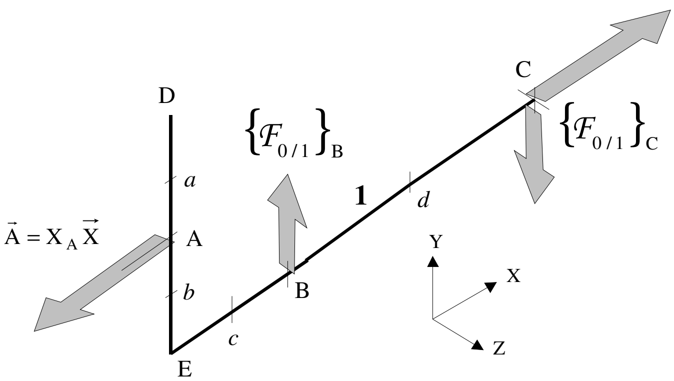
$/Z:\ +500000 - 1000 Y_B = 0 \Rightarrow Y_B = 500$

donc Y_C = -500

➔ résultats :

$\{\mathcal{F}_{0/1}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} = 500\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{B,R}$;

$\{\mathcal{F}_{0/1}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C} = 1000\vec{X} - 500\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_C} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{C,R}$



➔ expression générale du torseur de cohésion

$$\{Coh_{sup/cons}\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{R}_{G(sup/cons)}} = \mathcal{N}_x \vec{x} + \mathcal{T}_y \vec{y} + \mathcal{T}_z \vec{z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{G(sup/cons)}} = \mathcal{M}_t \vec{x} + \mathcal{M}f_y \vec{y} + \mathcal{M}f_z \vec{z} \end{Bmatrix}_{G,r}$$

➔ section (a)

◆ Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon DG_a exprimé au point G_a

$$\{\mathcal{F}_{ext/DGa}\}_{Ga} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_a} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Ga}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{Ga,R}$$

◆ Torseur de cohésion :

partie supprimée DG_a ; partie conservée G_aC

$$\{\mathcal{C}oh_{sup/cons}\}_{Ga} = \{\mathcal{F}_{ext/DGa}\}_{Ga}$$

$$\{\mathcal{C}oh_{sup/cons}\}_{Ga} = \{0\}_{Ga,r}$$

Pas de sollicitation ☺ !

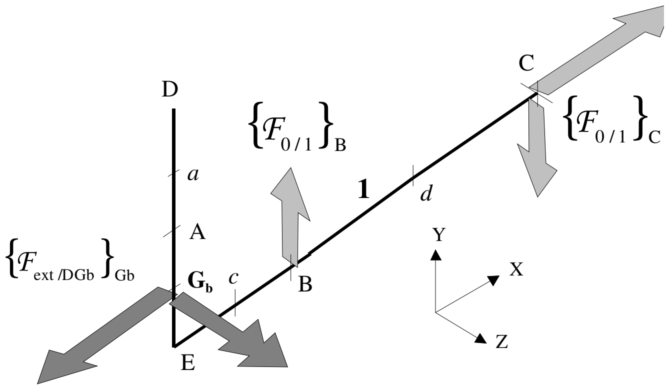
➔ section (b)

◆ Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon DG_b exprimé au point G_b

$$\{\mathcal{F}_{ext/DGb}\}_{Gb} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_b} = \vec{A} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gb}} = \overrightarrow{G_bA} \wedge \vec{A} \end{Bmatrix}_{Gb,R}$$

$$\overrightarrow{G_bA} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & +250 & 0 \\ -1000 & 0 & 0 \end{bmatrix} = +250000\vec{Z}$$

$$\Rightarrow \{\mathcal{F}_{ext/DGb}\}_{Gb} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_b} = -1000\vec{X} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gb}} = +250000\vec{Z} \end{Bmatrix}_{Gb,R}$$



◆ Torseur de cohésion :

- partie supprimée DG_b ; partie conservée G_bC
- axe local $\vec{x}$: normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée
- changement de base : Local (r) au Global (R) :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = -\vec{y} \\ \vec{Y} = \vec{x} \\ \vec{Z} = \vec{z} \end{Bmatrix}$$

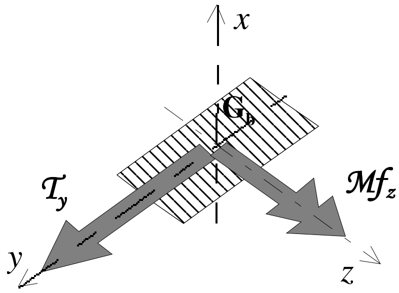
$$\{\mathcal{C}oh_{sup/cons}\}_{Gb} = \{\mathcal{F}_{ext/DGb}\}_{Gb}$$

$$\{\mathcal{C}oh_{sup/cons}\}_{Gb} = \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_x = 0 & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = +1000 & \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z = +250000 \end{Bmatrix}_{Gb,r}$$

$\Rightarrow$ sollicitations :

$\mathcal{T}y \Rightarrow$ cisaillement

$\mathcal{M}fz \Rightarrow$ flexion autour de l'axe z



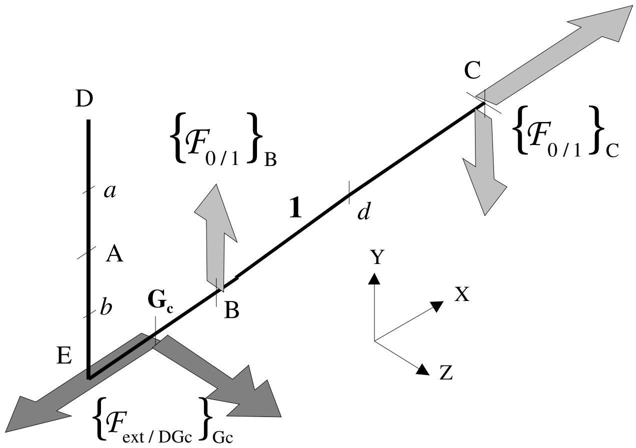
➔ section (c)

◆ Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon DG_c exprimé au point G_c

$$\{\mathcal{F}_{ext/DGc}\}_{Gc} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_c} = \vec{A} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gc}} = \overrightarrow{G_cA} \wedge \vec{A} \end{Bmatrix}_{Gc,R}$$

$$\overrightarrow{G_cA} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ +250 & +500 & 0 \\ -1000 & 0 & 0 \end{bmatrix} = +500000\vec{Z}$$

$$\Rightarrow \{\mathcal{F}_{ext/DGc}\}_{Gc} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_c} = -1000\vec{X} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gc}} = +500000\vec{Z} \end{Bmatrix}_{Gc,R}$$



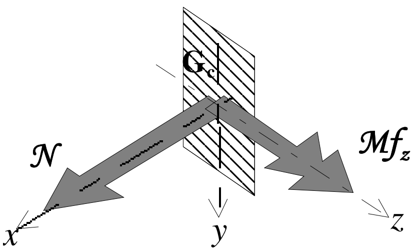
◆ Torseur de cohésion :

- partie supprimée DG_c ; partie conservée G_cC
- axe local $\vec{x}$: normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée
- changement de base : Local (r) au Global (R) :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = -\vec{x} \\ \vec{Y} = \vec{y} \\ \vec{Z} = \vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{Gc} = \{\mathcal{F}_{ext/DGc}\}_{Gc}$$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{Gc} = \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_x = +1000 & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = 0 & \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z = +500000 \end{Bmatrix}_{Gc,r}$$



⇒ sollicitations :

$\mathcal{N} \Rightarrow$ traction

$\mathcal{M}fz \Rightarrow$ flexion autour de l'axe z

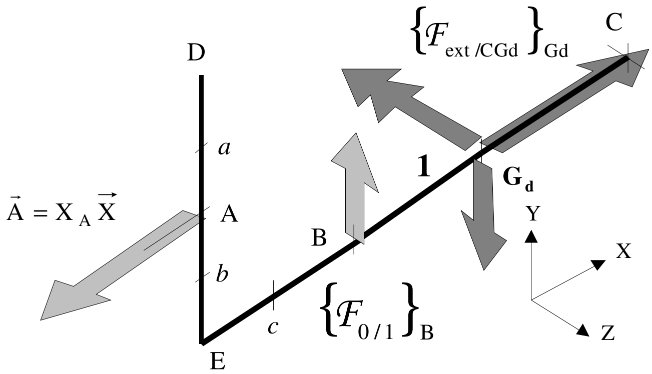
➔ section (d)

◆ Torseur des actions transmissibles de l'extérieur sur le tronçon CG_d exprimé au point G_d

$$\{\mathcal{F}_{ext/CGd}\}_{Gd} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_d} = \vec{C} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gc}} = \overrightarrow{G_dC} \wedge \vec{C} \end{Bmatrix}_{Gd,R}$$

$$\overrightarrow{G_dC} \wedge \vec{C} = \begin{bmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ +500 & 0 & 0 \\ +1000 & -500 & 0 \end{bmatrix} = -250000\vec{Z}$$

$$\Rightarrow \{\mathcal{F}_{ext/CGd}\}_{Gd} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{G_d} = +1000\vec{X} - 500\vec{Y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{Gc}} = -250000\vec{Z} \end{Bmatrix}_{Gd,R}$$



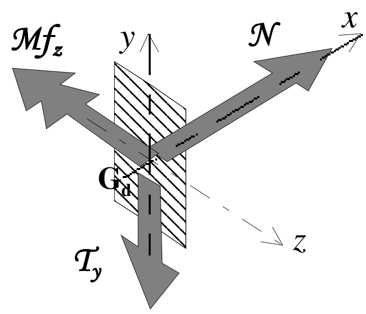
◆ Torseur de cohésion :

- partie supprimée CG_d ; partie conservée G_dD
- axe local $\vec{x}$: normale à la section droite et sortante de la matière de la partie conservée
- changement de base : Local (r) au Global (R) :

$$\begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}_r \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{X} = \vec{x} \\ \vec{Y} = \vec{y} \\ \vec{Z} = \vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{Gd} = \{\mathcal{F}_{ext/CGd}\}_{Gd}$$

$$\{Coh_{sup/cons}\}_{Gd} = \begin{Bmatrix} \mathcal{N}_x = +1000 & \mathcal{M}_t = 0 \\ \mathcal{T}_y = -500 & \mathcal{M}f_y = 0 \\ \mathcal{T}_z = 0 & \mathcal{M}f_z = -250000 \end{Bmatrix}_{Gd,r}$$



⇒ sollicitations :

$\mathcal{N} \Rightarrow$ traction

$\mathcal{T}y \Rightarrow$ cisaillement

$\mathcal{M}fz \Rightarrow$ flexion autour de l'axe z