

**APPROCHE ENERGETIQUE DES STRUCTURES - CAS D'UNE POUTRE EN FLEXION PLANE**

**1. OBJECTIF**

Rechercher les relations de comportement déplacements-efforts et efforts-déplacements et montrer l'influence de la prise en compte de l'effort tranchant dans une poutre encadrée à une extrémité 1 et chargée (force et moment) à l'autre extrémité 2.

Éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G d'une section droite d'abscisse x.

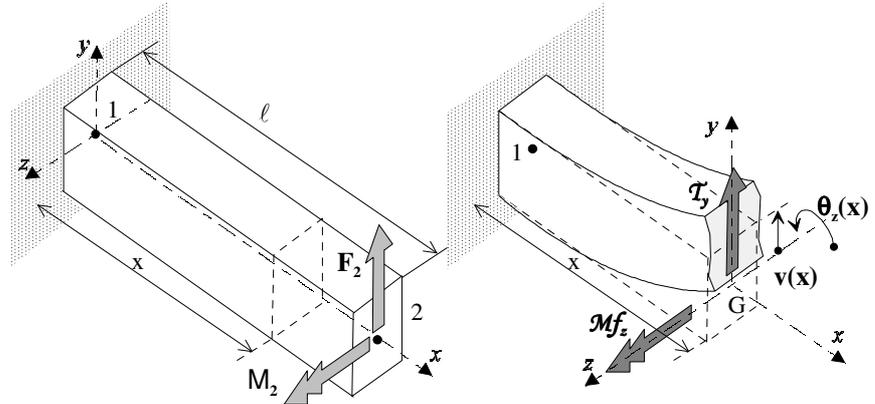
- effort tranchant :

$$\mathcal{T}_y = F_2$$

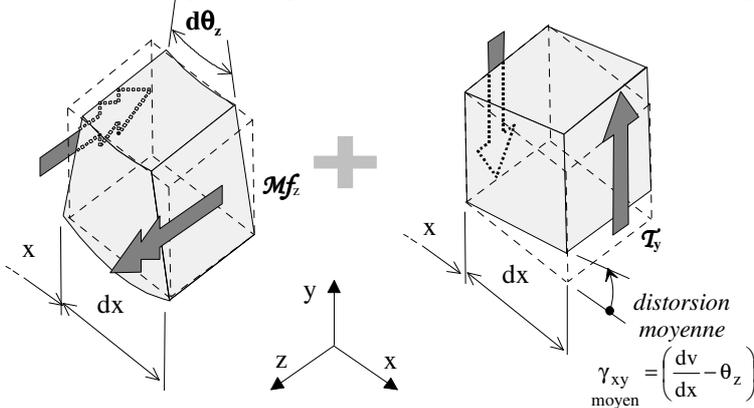
- moment de flexion :

$$\mathcal{M}f_z = F_2(\ell - x) + M_2$$

Cette poutre est donc sollicitée en flexion plane.



Déformations engendrées par ces éléments de réduction dans un tronçon élémentaire de poutre :



L'énergie de déformation emmagasinée dans une tranche de poutre dx subissant une rotation relative  $d\theta_z$  engendrée par le moment de flexion et une distorsion engendrée l'effort tranchant s'écrit :

$$dE_{\text{pot. flexion}} = dE_{\text{pot. } \mathcal{M}f_z} + dE_{\text{pot. } \mathcal{T}_y}$$

**2. PRISE EN COMPTE DU SEUL EFFET DU MOMENT DE FLEXION**

**2.1 Energie de déformation due à cet effet**

Energie de déformation emmagasinée dans une tranche de poutre dx subissant une rotation relative  $d\theta_z$  engendrée par le

moment de flexion :  $dE_{\text{pot. } \mathcal{M}f_z} = \frac{1}{2} \mathcal{M}f_z \times d\theta_z$

Relation de comportement au moment de flexion :  $\mathcal{M}f_z = E \times I_z \frac{d\theta_z}{dx}$

L'énergie de déformation emmagasinée dans l'élément de poutre dx s'écrit alors :  $dE_{\text{pot. } \mathcal{M}f_z} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}f_z^2}{E \times I_z} \times dx$

On en déduit l'énergie totale emmagasinée dans la poutre :

$$E_{\text{pot. } \mathcal{M}f_z} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{\mathcal{M}f_z^2}{E \times I_z} \times dx = \frac{1}{2 \times E \times I_z} \int_0^\ell [F_2(\ell - x) + M_2]^2 dx = \frac{1}{2 \times E \times I_z} \left( M_2^2 \times \ell + \frac{F_2^2 \times \ell^3}{3} + F_2 \times \ell^2 \times M_2 \right)$$

**2.2 Théorème de Castigliano**

Application du théorème de Castigliano pour calculer les déplacements en point courant i de la ligne moyenne de la poutre: la dérivée partielle de l'énergie de déformation par à un chargement  $F_i$  est égale à la **projection** du déplacement du point d'application i de  $F_i$  sur sa direction (ici  $F_i$  et  $v_i$  même direction). Enoncé analogue pour les moments.

$$v_i = \frac{\partial E_{\text{pot. } \mathcal{M}f_z}}{\partial F_i} \text{ et } \theta_{zi} = \frac{\partial E_{\text{pot. } \mathcal{M}f_z}}{\partial M_i}$$

pour le point 2 on peut écrire :

♦ déplacement linéaire (flèche) engendré par l'action de  $F_2$  :  $v_2 = \frac{\partial E_{\text{pot.}Mf_z}}{\partial F_2} = \frac{1}{E \times I_z} \left( \frac{F_2 \times \ell^3}{3} + \frac{M_2 \times \ell^2}{2} \right)$

♦ déplacement angulaire (rotation de section) engendré par l'action de  $M_2$  :  $\theta_{z2} = \frac{\partial E_{\text{pot.}Mf_z}}{\partial M_2} = \frac{1}{E \times I_z} \left( \frac{F_2 \times \ell^2}{2} + M_2 \times \ell \right)$

Remarque :

- l'utilisation de la relation de comportement en flexion (par intégrations successives) permettrait d'obtenir les mêmes résultats.

- si l'on souhaite connaître un déplacement linéaire ou angulaire en un point où il n'y a pas de chargement (respectivement force ou moment) il suffit d'appliquer en ce point une force fictive nulle ou un moment fictif nul. On calcule l'énergie potentielle de déformation en insérant ces chargements fictifs dans son expression. On dérive ensuite par rapport à ces chargements fictifs et on obtient ainsi les déplacements correspondants en attribuant la valeur nulle aux chargements fictifs dans l'expression des déplacements après cette dérivation partielle. Par exemple si l'on veut connaître la rotation de section  $\theta_{z2}$  due à la force  $F$  seule, dans l'expression de ce déplacement il suffit de faire

$$M_2 = 0 \text{ et l'obtient : } \theta_{z2} = \frac{\partial E_{\text{pot.}Mf_z}}{\partial M_2} = \frac{1}{E \times I_z} \left( \frac{F_2 \times \ell^2}{2} \right)$$

### 2.3 Relations de comportement

Les deux expressions précédentes permettent l'écriture sous forme matricielle de la relation de comportement linéaire déplacements-efforts  $\{d\} = [\alpha] \cdot \{F\}$  :

$$\begin{cases} v_2 = \frac{F_2 \times \ell^3}{3 \times E \times I_z} + \frac{M_2 \times \ell^2}{2 \times E \times I_z} \\ \theta_{z2} = \frac{F_2 \times \ell^2}{2 \times E \times I_z} + \frac{M_2 \times \ell}{E \times I_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell^3}{3 \times E \times I_z} & \frac{\ell^2}{2 \times E \times I_z} \\ \frac{\ell^2}{2 \times E \times I_z} & \frac{\ell}{E \times I_z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

où apparaît la matrice de souplesse partielle carrée et symétrique de cette structure  $[\alpha] = \frac{1}{E \times I_z} \begin{bmatrix} \frac{\ell^3}{3} & \frac{\ell^2}{2} \\ \frac{\ell^2}{2} & \ell \end{bmatrix}$

En inversant la relation précédente on obtient la relation de comportement linéaire efforts-déplacements  $\{F\} = [K] \cdot \{d\}$  :

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{E \times I_z}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

où apparaît la matrice de raideur partielle carrée et symétrique de cette structure  $[K] = \frac{E \times I_z}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$

## 3 PRISE EN COMPTE DU SEUL EFFET DE L'EFFORT TRANCHANT

### 3.1 Energie de déformation due à cet effet

Energie de déformation emmagasinée dans une tranche de poutre  $dx$  une distorsion engendrée l'effort tranchant :

$$dE_{\text{pot.}\mathcal{T}_y} = \frac{1}{2} \mathcal{T}_y \times \left( \gamma_{\text{moyen}} \times dx \right) \text{ où la distorsion moyenne s'écrit } \gamma_{\text{moyen}} = \left( \frac{dv}{dx} - \theta_z \right)$$

Relation de comportement à l'effort tranchant :  $\mathcal{T}_y = G \times k_y \times S \left( \frac{dv_{Mf_z, \mathcal{T}_y}}{dx} - \theta_z \right)$  ou  $\mathcal{T}_y = G \times k_y \times S \left( \frac{dv_{\mathcal{T}_y}}{dx} \right)$

L'énergie de déformation emmagasinée dans l'élément de poutre  $dx$  s'écrit alors :  $dE_{\text{pot.}\mathcal{T}_y} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{T}_y^2}{G \times k_y \times S} \times dx$

On en déduit l'énergie totale emmagasinée dans la poutre :

$$E_{\text{pot.}\mathcal{T}_y} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{\mathcal{T}_y^2}{G \times k_y \times S} \times dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{F_2^2}{G \times k_y \times S} \times dx = \frac{F_2^2 \times \ell}{2 \times G \times k_y \times S}$$

### 3.2 Théorème de Castiglano

Application du théorème de Castiglano pour calculer les déplacements en point courant  $i$  de la ligne moyenne de la

poutre :  $v_i = \frac{\partial E_{\text{pot.}\mathcal{T}_y}}{\partial F_i}$

Pour le point 2 on peut écrire le déplacement linéaire (flèche) *supplémentaire* engendré par la prise en compte distorsion de la section sous l'action de  $F_2$  :

$$v_{2T_y} = \frac{\partial E_{\text{pot.}T_y}}{\partial F_2} = \frac{F_2 \times \ell}{G \times k_y \times S}$$

#### 4 PRISE EN COMPTE DES EFFETS SIMULTANES DES DEUX SOLLICITATIONS

##### 4.1 Energie de déformation totale

$$E_{\text{pot. flexion}} = E_{\text{pot.}M_z} + E_{\text{pot.}T_y} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_z^2}{E \times I_z} \times dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{T_y^2}{G \times k_y \times S} \times dx$$

Le déplacement linéaire total au point 2 s'écrit alors :

$$v_{2M_z} + v_{2T_y} = \frac{\ell^3}{3 \times E \times I_z} \left( 1 + \frac{\Phi}{4} \right) F_2 + \frac{\ell^2}{2 \times E \times I_z} M_2$$

$$\text{avec } \Phi = \frac{12 \times E \times I_z}{G \times k_y \times S \times \ell^2} = 24(1 + \nu) \frac{I_z}{k_y \times S \times \ell^2}$$

*Remarque* : en exprimant le déplacement global au point 2 uniquement à partir de l'action de  $F_2$  on obtient :

$$v_2 = \frac{F_2 \times \ell}{G \times k_y \times S} \left( \frac{\ell^2}{\ell^2} \right) + \frac{F_2 \times \ell^3}{3 \times E \times I_z}$$

On constate alors que le déplacement dû à la distorsion de la section est négligeable devant celui du au moment de flexion si  $k_y \times S \times \ell^2 \gg I_z$ , c'est-à-dire généralement dans le cas d'une poutre élancée.

*Application* : poutre de section IPE 100 (aire section  $S = 1030 \text{ mm}^2$ , section réduite  $S_{ry} = k_y \times S = \text{aire âme} = 363.26 \text{ mm}^2$ , moment quadrique  $I_z = 1710000 \text{ mm}^4$ ),  $\ell = 1000 \text{ mm}$ ,  $F_2 = 1000 \text{ N}$ ,  $E = 200\,000 \text{ MPa}$ ,  $G = 80\,000 \text{ MPa}$

$$v_2 = \frac{1000 \times 1000}{80000 \times 363.26} + \frac{1000 \times 1000^3}{3 \times 200000 \times 1710000} = \underbrace{0.0358}_{v_{2T_y}} + \underbrace{0.974}_{v_{2M_z}} = 1.0098 \text{ mm}$$

##### 4.2 Nouvelles relations de comportement

Les matrices de souplesse et de raideur s'écrivent :

♦ matrice de souplesse :

$$[\alpha] = \frac{1}{E \times I_z} \begin{bmatrix} \frac{\ell^3}{3} \left( 1 + \frac{\Phi}{4} \right) & \frac{\ell^2}{2} \\ \frac{\ell^2}{2} & \ell \end{bmatrix}$$

♦ matrice de raideur :

$$[K] = \frac{12 \times E \times I_z}{\ell^3 (1 + \Phi)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\ell}{2} \\ -\frac{\ell}{2} & \frac{4 + \Phi}{12} \ell^2 \end{bmatrix}$$

*Remarque* : dans la matrice de souplesse seul le terme  $\alpha_{11}$  est affecté par la prise en compte de l'énergie de déformation en cisaillement