# ENERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION - THEOREME DE CASTIGLANO - POTENCE

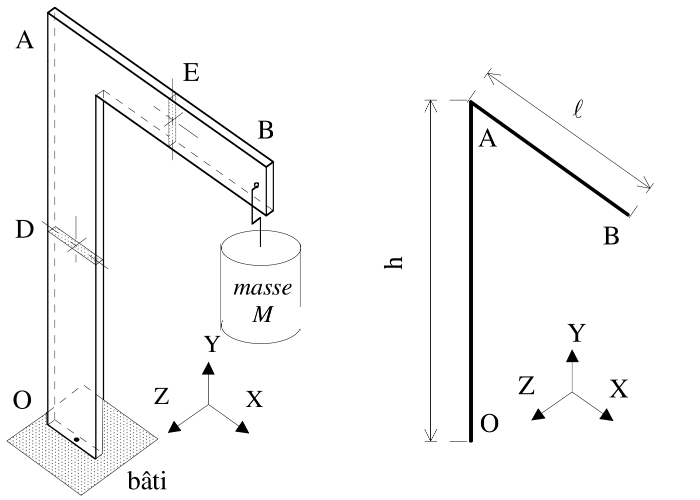
## 1 OBJECTIFS

On se propose d'appliquer le contenu de l'exercice

APPROCHE ENERGETIQUE DES STRUCRURES - CAS D'UNE POUTRE EN FLEXION PLANE
(ex-energie-poutre-flex-cis.pdf)
à la potence ci-contre déjà exploitée dans les deux exercices suivants :

- « ELEMENTS DE REDUCTION DU TORSEUR DE COHESION–POTENCE » (ex-potence.pdf)

- « PRINCIPE DE SUPERPOSITION APPLIQUE A LA POTENCE » (ex-prin-superposition-potence.pdf)




a) Structure réelle

b) Tracé des lignes moyennes des poutres (modèle de calcul).

## 2 ENERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION DANS LA POTENCE SOLLICITEE

Rappels : relation de comportement au moment de flexion : $\mathcal{M}f_z = E \times I_z \dfrac{d\theta_z}{dx}$

- énergie de déformation emmagasinée dans une tranche de poutre dx subissant une rotation relative $d\theta_z$ engendrée par le moment de flexion : $dE_{pot.\mathcal{M}f_z} = \dfrac{1}{2}\mathcal{M}f_z \times d\theta_z$

- l'énergie de déformation emmagasinée dans l'élément de poutre dx s'écrit alors : $dE_{pot.\mathcal{M}f_z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{M}f_z^{\,2}}{E \times I_z} \times dx$

L'énergie potentielle de déformation totale engendrée par le chargement à l'extrémité libre B est égale :
$E_{pot\ totale} = E_{potOA} + E_{potAB}$

Expression de $E_{pot\ OA}$

$$E_{pot.\mathcal{M}f_z} = \frac{1}{2}\int_0^h \frac{\mathcal{M}f_z^{\,2}}{E \times I_z} \times dx = \frac{1}{2 \times E \times I_z}\int_0^h (Y_B \times \ell)^2\, dx = \frac{h \times \ell^2}{2 \times E \times I_z} Y_B^{\,2}$$

Expression de $E_{pot\ AB}$

$$E_{pot.\mathcal{M}f_z} = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{\mathcal{M}f_z^{\,2}}{E \times I_z} \times dx = \frac{1}{2 \times E \times I_z}\int_0^\ell [Y_B(\ell - x)]^2\, dx = \frac{1}{2 \times E \times I_z} Y_B^{\,2}\left(\ell^3 - \frac{2\ell^3}{2} + \frac{\ell^3}{3}\right) = \frac{\ell^3}{3 \times E \times I_z} Y_B^{\,2}$$

$$E_{pot\ totale} = \left(\frac{h \times \ell^2}{2} + \frac{\ell^3}{3}\right)\frac{Y_B^{\,2}}{E \times I_z}$$

## 3 APPLICATION DU THEOREME DE CASTIGLIANO

Flèche au point B :

$$v_B = \frac{\partial E_{pot.totale}}{\partial Y_B} = \left(h \times \ell^2 + \frac{\ell^3}{3}\right)\frac{Y_B}{E \times I_z}$$

Pour calculer la rotation de section au point B, on rappelle qu'il faut appliquer en ce point un moment fictif nul $\overrightarrow{M_B} = N_B \vec{Z} = \vec{0}$