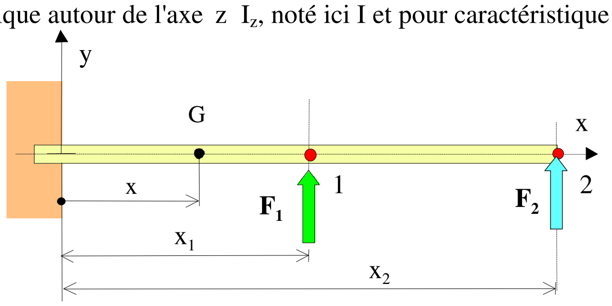
DETERMINATION DE LA MATRICE DE SOUPLESSE D'UNE STRUCTURE

1 OBJECTIFS

Calcul de la matrice de souplesse à partir d'un exemple

Soit une structure poutre encastrée à une extrémité et sollicitée par deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ ayant pour caractéristique géométrique un moment quadratique autour de l'axe $\vec{z}$ I_z, noté ici I et pour caractéristique de matériau un module de Young E.

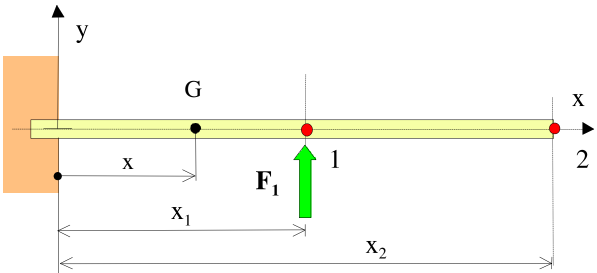


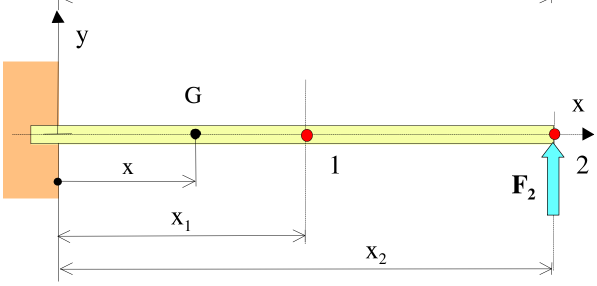
2 TRAVAIL DEMANDE

On souhaite déterminer les déplacements verticaux (flèches) au droit des points de chargements 1 et 2 et les mettre sous la forme de la relation de comportement déplacements-forces $\{d\} = [\alpha] \bullet \{F\}$

Méthodologie

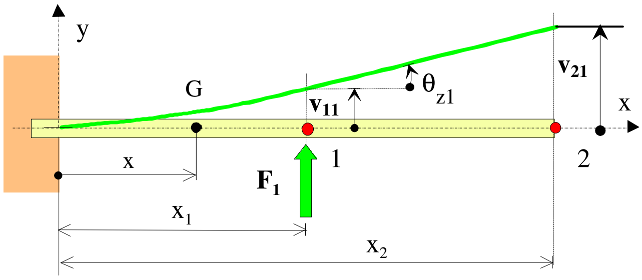
Pour chaque chargement, calculer les déplacements aux points 1 et 2 et superposer les effets de ces deux chargements cumulés afin de calculer les flèches totales, mettre ensuite ces résultats sous le forme matricielle $\{d\} = [\alpha] \bullet \{F\}$





ELEMENTS DE CORRECTION

Premier cas de chargement : $\overrightarrow{F_1} = F_1\vec{y}$ à l'abscisse x_1



Eléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G d'une section courante d'abscisse $0 \le x \le x_1$:

$$\{\mathcal{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathcal{T}_y} = F_1\vec{y} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}f_z} = F_1(x_1 - x)\vec{z} \end{Bmatrix}_G$$

La relation de comportement au moment de flexion s'écrit : $\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{\mathcal{M}f_z}{EI}$

où v(x) est le déplacement suivant $\vec{y}$ de tout point de la ligne moyenne de la poutre.

Dans la zone $0 \le x \le x_1$ la déformée v(x) vérifie donc l'équation différentielle : $EI\dfrac{d^2v}{dx^2} = \mathcal{M}f_z = F_1(x_1 - x)$

donc par intégrations successives (les constantes d'intégration disparaissant du fait de l'encastrement en x=0) :

$$EI\frac{dv}{dx} = -F_1\frac{x^2}{2} + F_1 x_1 x \quad \text{et ensuite} \quad EIv(x) = -F_1\frac{x^3}{6} + F_1 x_1\frac{x^2}{2} = F_1\frac{x^2}{2}\left(x_1 - \frac{x}{3}\right)$$

- déplacements à l'abscisse x_1 :

une flèche : $v(x_1) = F_1\dfrac{x_1^{\,3}}{3EI}$ et une rotation de section : $\theta_z(x_1) \cong \dfrac{dv(x_1)}{dx} = F_1\dfrac{x_1^{\,2}}{2EI}$

- déplacement à l'abscisse $x_2 > x_1$ s'écrit alors, en remarquant que la portion de poutre $x_1 \le x \le x_2$ reste rectiligne :

$$v(x_2) = v(x_1) + \frac{dv(x_1)}{dx}(x_2 - x_1) \;\Rightarrow\; v(x_2) = F_1\frac{x_1^{\,3}}{3EI} + F_1\frac{x_1^{\,2}}{2EI}(x_2 - x_1)$$

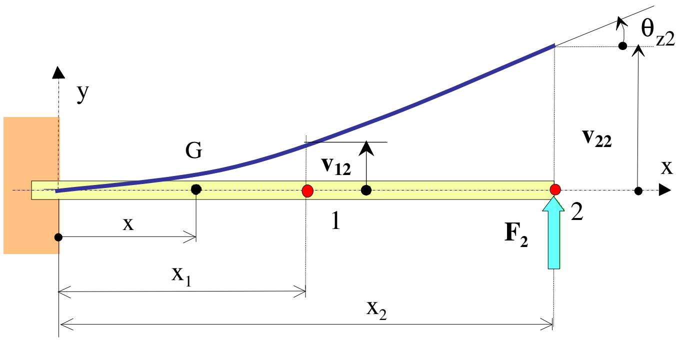
soit : $v(x_2) = F_1\dfrac{x_1^{\,2}}{2EI}\left(x_2 - \dfrac{x_1}{3}\right)$

Avec la notation indicielle les déplacements obtenus pour l'application de $\overrightarrow{F_1}$ s'écrivent :

au point (1) : $v_{11} = F_1\dfrac{x_1^{\,3}}{3EI}$

au point (2) : $v_{21} = F_1\dfrac{x_1^{\,2}}{2EI}\left(x_2 - \dfrac{x_1}{3}\right)$

Second cas de chargement : $\overrightarrow{F_2} = F_2\vec{y}$ à l'abscisse x_2 :



Considérons maintenant l'effort $\overrightarrow{F_2}$ à l'abscisse x_2. En tenant compte que $x_2 > x_1$, on peut utiliser l'expression $EIv(x) = -F_1\dfrac{x^3}{6} + F_1 x_1\dfrac{x^2}{2} = F_1\dfrac{x^2}{2}\left(x_1 - \dfrac{x}{3}\right)$ dans laquelle on remplace F_1 par F_2 et x_1 par x_2.

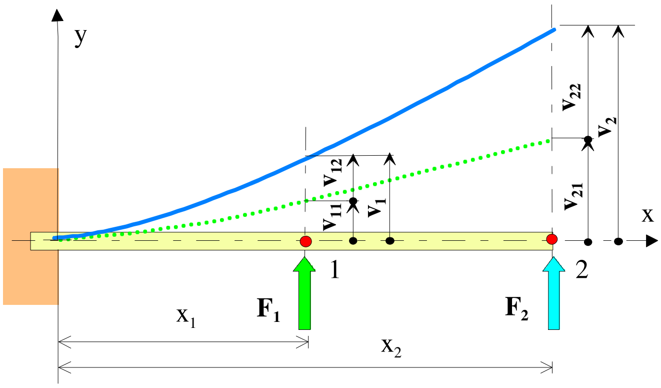
Avec la notation indicielle les déplacements obtenus pour l'application de $\overrightarrow{F_2}$ s'écrivent :

au point 1 : $v_{12} = F_2\dfrac{x_1^{\,2}}{2EI}\left(x_2 - \dfrac{x_1}{3}\right)$

au point 2 : $v_{22} = F_2 \dfrac{x_2^{\,3}}{3EI}$

Superposition des effets des deux chargements : $\vec{F_1} = F_1\,\vec{y}$ à l'abscisse x_1 et $\vec{F_2} = F_2\,\vec{y}$ à l'abscisse x_2 :

- déplacements totaux :



$$v_1 = v_{11} + v_{12} = F_1 \frac{x_1^{\,3}}{3EI} + F_2 \frac{x_1^{\,2}}{2EI}\left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right)$$

$$v_2 = v_{21} + v_{22} = F_1 \frac{x_1^{\,2}}{2EI}\left(x_2 - \frac{x_1}{3}\right) + F_2 \frac{x_2^{\,3}}{3EI}$$

soit sous forme matricielle : $\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^{\,3}}{3EI} & \dfrac{x_1^{\,2}}{2EI}\left(x_2 - \dfrac{x_1}{3}\right) \\ \dfrac{x_1^{\,2}}{2EI}\left(x_2 - \dfrac{x_1}{3}\right) & \dfrac{x_2^{\,3}}{3EI} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{d\} = [\alpha] \bullet \{F\}$

on peut remarquer la symétrie des coefficients $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.