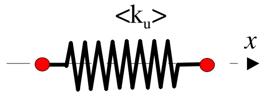
ELEMENTS FINIS : MATRICES DE RAIDEUR DE RESSORTS

Exemple n° 1: ressort hélicoïdal

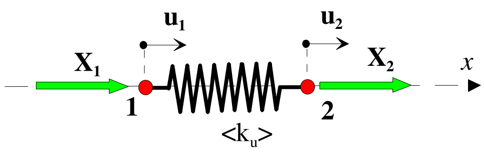
⇨ Problème:



On considère le ressort hélicoïdal de raideur k_u pour des élongations suivant l'axe $\vec{x}$. On demande de définir sa matrice de raideur.

⇨ Résolution :

On note (1) et (2) les extrémités du ressort (nœuds). Le chargement est constitué par les efforts X_1 et X_2. Les d.d.l. associés sont donc les déplacements nodaux suivant $\vec{x}$ notés u_1 et u_2. Les forces et les déplacements linéaires sont représentés ici par leurs valeurs algébriques.



$\{F\}_{él}$	$\{d\}_{él}$
X_1	u_1
X_2	u_2

- allongement du ressort : $(u_2 - u_1)$

- travail des efforts extérieurs devient: $W = \frac{1}{2} k_u (u_2 - u_1)^2 = E_{pot.}$

soit une énergie de déformation emmagasinée : $E_{pot.} = \frac{1}{2} k_u (u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2)$

On reconnaît la forme quadratique (voir rappels mathématiques à la fin de l'exercice) des déplacements nodaux, qui s'écrit aussi : $E_{pot.} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} k_u & -k_u \\ -k_u & k_u \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

Il apparaît la matrice de raideur de l'élément : $[k]_{él} = \begin{bmatrix} k_u & -k_u \\ -k_u & k_u \end{bmatrix}$

Relation de comportement du ressort hélicoïdal : $\{F\}_{él} = [k]_{él} \bullet \{d\}_{él} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_u & -k_u \\ -k_u & k_u \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

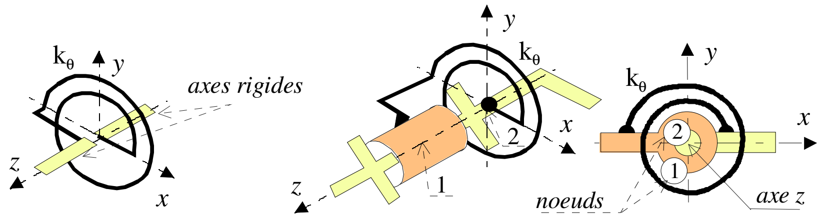
Cet élément chargé "flotte" dans la direction $\vec{x}$ du chargement (mouvement d'ensemble de translation suivant $\vec{x}$). La matrice de raideur ne s'inverse donc pas, ce que l'on vérifie bien en calculant le déterminant principal de cette matrice, soit :

$$\Delta_{principal} = k_u^2 - k_u^2 = 0$$

Exemple n° 2: ressort spirale

⇨ Problème :

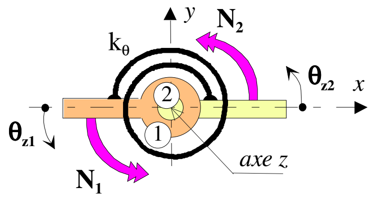
Soit un ressort spirale de raideur k_θ pour la rotation autour de l'axe $\vec{z}$ de la liaison pivot associée. On se propose de définir sa matrice de raideur.



a) ressort spirale seul *b) ressort spirale associé à une liaison pivot*

⇨ Résolution *:*

On note (1) et (2) les deux points repérant respectivement chaque pièce de l'articulation schématisant la liaison pivot (nœuds de l'élément ressort spirale). Le chargement est constitué par les moments N_1 et N_2. Les d.d.l. associés sont donc les rotations nodales de directions parallèles à l'axe $\vec{z}$ notées θ_{z1} et θ_{z2} de chacune des pièces constituant l'articulation. Les moments et les déplacements angulaires sont représentés ici par leurs valeurs algébriques.



$\{F\}_{él}$	$\{d\}_{él}$
N_1	θ_{z1}
N_2	θ_{z2}

- déformée angulaire du ressort : $(\theta_{z2} - \theta_{z1})$

- travail des moments extérieurs devient : $W = \dfrac{1}{2} k_\theta (\theta_{z2} - \theta_{z1})^2 = E_{pot.}$

soit une énergie de déformation emmagasinée : $E_{pot.} = \dfrac{1}{2} k_\theta (\theta_{z1}{}^2 + \theta_{z2}{}^2 - 2\theta_{z1}\theta_{z2})$

On reconnaît la forme quadratique (voir rappels mathématiques à la fin de l'exercice) des déplacements nodaux, qui s'écrit aussi : $E_{pot} \dfrac{1}{2} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$

- matrice de raideur du ressort spirale : $[k]_{él} = \begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix}$

Comme pour l'exemple précédent, on en déduit la relation de comportement de ce ressort spirale :

$$\{F\}_{él} = [k]_{él} \bullet \{d\}_{él} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

On peut faire la même remarque concernant l'absence de liaison du ressort spirale avec son environnement dans la configuration représentée sur la figure qui conduit aussi à une matrice de raideur singulière.

Rappels mathématiques : forme quadratique

On nomme ainsi une expression du second degré de 2 variables x1 et x2 : $W = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2$

Considérons une telle expression réécrite comme suit : $W = \dfrac{1}{2}(a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2)$

On remarque qu'elle peut aussi apparaître comme le produit matriciel : $W = \dfrac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrice ligne} \\ (1\times 2)}} \bullet \underbrace{\begin{Bmatrix} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) \\ (a_{12} x_1 + a_{22} x_2) \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{matrice colonne} \\ (2\times 1)}}$

ou encore : $W = \dfrac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ où a21 = a12

la forme quadratique particulière précédente est construite sur une matrice carrée et symétrique constituée avec les coefficients aij