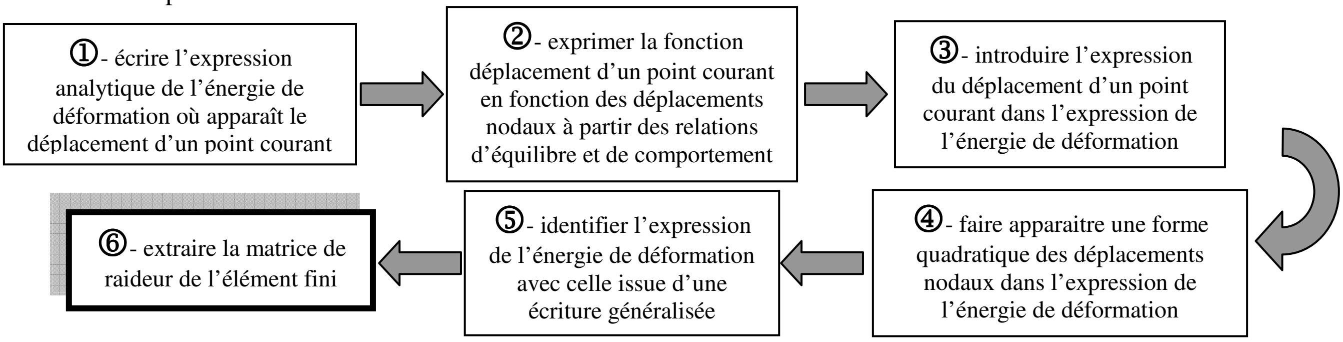
ELABORATION DE LA MATRICE DE RAIDEUR DE L'ELEMENT POUTRE EN FLEXION PLANE

OBJECTIFS

Cet exercice à pour but de découvrir toutes les étapes permettant d'élaborer la matrice de raideur d'un élément fini poutre sollicité en flexion plane



◆ **Rappel** : sollicitation de flexion plane sur une poutre

Considérons une flexion de poutre s'effectuant dans un plan principal, par exemple (*xy*) et dont la ligne moyenne est portée sur l'axe $\vec{x}$. On rappelle qu'alors les éléments de réduction du torseur de cohésion au centre géométrique G de la section droite se réduisent à : $\{\mathcal{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \mathcal{T}_y\,\vec{y} \\ \mathcal{M}f_z\,\vec{z} \end{Bmatrix}_G$, où $\mathcal{T}_y$ est l'effort tranchant porté par l'axe $\vec{y}$ et $\mathcal{M}f_z$ le moment de flexion porté par l'axe $\vec{z}$.

Les déplacements d'une section sont dans ce cas :

- v(x) : déplacement linéaire ou flèche suivant l'axe $\vec{y}$ du centre de la section.
- $\theta_z(x)$: déplacement angulaire ou rotation de la section autour de l'axe $\vec{z}$.

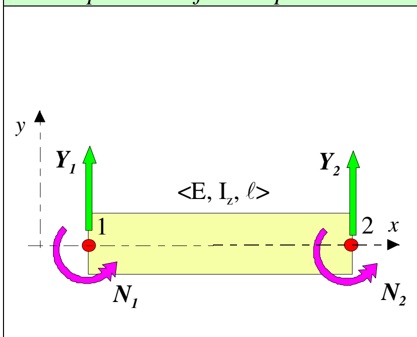
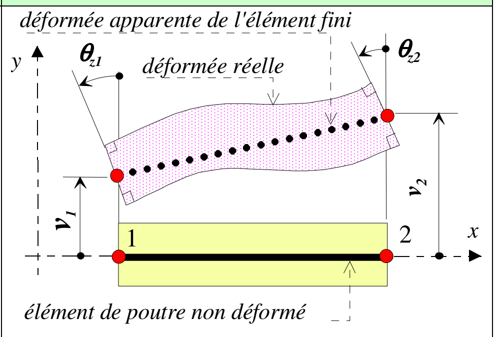
On montre que lorsque la surface latérale de la poutre est libre de tout effort, l'équilibre d'une tranche élémentaire dx de poutre amène aux relations : $\dfrac{d\mathcal{M}f_z}{dx} + \mathcal{T}_y = 0$ **et** $\dfrac{d\mathcal{T}_y}{dx} = 0$

Et la relation de comportement s'écrit dans le cadre de l'hypothèse de Bernoulli : $\theta_z(x) \cong \dfrac{dv}{dx} \;\Rightarrow\; \dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{\mathcal{M}f_z}{EI_z}$

◆ **Matrice de raideur**

❍ Définition de l'élément fini

C'est une poutre de longueur ℓ. Il a pour propriété de matériau un module d'élasticité longitudinale E, et pour propriété de section droite le moment quadratique par rapport à l'axe $\vec{z}$ soit I_z. Cet élément fini sera représenté et modélisé pour le calcul par sa ligne moyenne. Les centres géométriques des sections d'extrémités (1) et (2) sont les nœuds de l'élément. Le repère (*xyz*), lié à l'élément, est le repère local.

Actions mécaniques extérieures appliquées aux nœuds de l'élément poutre en flexion plane	*Déplacements nodaux et déformée engendrés*
	

Le chargement de l'élément consiste en des forces transverses et des moments respectivement $Y_1\,\vec{y}$, $N_1\,\vec{z}$ au nœud (1) et $Y_2\,\vec{y}$, $N_2\,\vec{z}$ au nœud (2). Les degrés de liberté associés sont donc :

- les translations $v_1\,\vec{y}$ au nœud (1) et $v_2\,\vec{y}$ au nœud (2)
- les rotations de section $\theta_{z1}\,\vec{z}$ au nœud (1) et $\theta_{z2}\,\vec{z}$ au nœud (2),

soit au total $2 \times 2 = 4$ d.d.l. pour l'élément.

❍ Expression des déplacements

Toute section droite intermédiaire d'abscisse x ($0 \leq x \leq \ell$) a son déplacement repéré par :

- $v(x)$ avec $v(0) = v_1$ et $v(\ell) = v_2$
- $\theta_z(x)$ avec $\theta_z(0) = \theta_{z1}$ et $\theta_z(\ell) = \theta_{z2}$.

On rappelle l'expression de l'énergie de déformation $E_{pot.}$ (cf. énergétique des structures) à partir du déplacement transverse v(x) de toute section droite d'abscisse x pour la poutre de longueur ℓ : $E_{pot.} = \frac{1}{2}\int_\ell EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$

Le calcul de cette énergie nécessite donc de connaître la loi d'évolution v(x). L'élément étant supposé chargé uniquement en ses extrémités, l'effort tranchant $\vec{\mathcal{T}}_y$ y est donc constant. A partir des relations d'équilibre et de comportement au moment de flexion, on peut écrire : $\frac{d\mathcal{T}_y}{dx} = -\frac{d^2\mathcal{M}f_z}{dx^2} = -EI_z\frac{d^4v}{dx^4} = 0$

la déformée v(x) est donc régie par l'équation différentielle : $\frac{d^4v(x)}{dx^4} = 0$

qui conduit après intégrations successives à : $v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

On obtient avec l'approximation de Bernoulli ($\theta_z(x) \cong \frac{dv}{dx}$), les expressions suivantes :

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$\theta_z(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Calcul des constantes a, b, c, d en fonction des conditions aux limites, c'est-à-dire des déplacements des nœuds (ou d.d.l.) de l'élément v_1, v_2 et θ_{z1}, θ_{z2} :

pour x= 0 :	$v(0) = v_1$,	$\rightarrow$	$v_1 = d$
	$\theta_z(0) = \theta_{z1}$,	$\rightarrow$	$\theta_{z1} = c$
pour x= ℓ :	$v(\ell) = v_2$,	$\rightarrow$	$v_2 = a\ell^3 + b\ell^2 + c\ell + d$
	$\theta_z(\ell) = \theta_{z2}$,	$\rightarrow$	$\theta_{z2} = 3a\ell^2 + 2b\ell + c$

On obtient un système de 4 équations à 4 inconnues a, b, c, d, dont la résolution amène à l'écriture regroupée suivante où l'on a posé : $\bar{x} = \frac{x}{\ell}$

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta_z(x) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-3\bar{x}^2+2\bar{x}^3 & \ell(\bar{x}-2\bar{x}^2+\bar{x}^3) & (3\bar{x}^2-2\bar{x}^3) & \ell(\bar{x}^3-\bar{x}^2) \\ \frac{6}{\ell}(\bar{x}^2-\bar{x}) & (3\bar{x}^2-4\bar{x}+1) & -\frac{6}{\ell}(\bar{x}^2-\bar{x}) & (3\bar{x}^2-2\bar{x}) \end{bmatrix}}_{matrice\ d'interpolation\,(2\times 4)} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

Cette relation nous permet de connaître le déplacement de toute section droite intermédiaire, d'abscisse x, au moyen d'une matrice d'interpolation (2×4).

❍ Détermination de la matrice de raideur

En dérivant deux fois la valeur de v(x) fournie par la relation précédente, on obtient la forme suivante de $\frac{d^2v}{dx^2}$:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{6}{\ell^2}(2\bar{x}-1)v_1 + \frac{4}{\ell}\left(\frac{3\bar{x}}{2}-1\right)\theta_{z1} - \frac{6}{\ell^2}(2\bar{x}-1)v_2 + \frac{2}{\ell}(3\bar{x}-1)\theta_{z2}$$

En substituant dans l'expression de l'énergie de déformation $E_{pot.} = \frac{1}{2}\int_\ell EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$, il vient après calcul :

$$E_{pot.} = \frac{1}{2}EI_z\left(\frac{12}{\ell^3}v_1^{\,2} + \frac{4}{\ell}\theta_{z1}^{\,2} + \frac{12}{\ell^3}v_2^{\,2} + \frac{4}{\ell}\theta_{z2}^{\,2} + \frac{12}{\ell^2}v_1\theta_{z1} - \frac{24}{\ell^3}v_1v_2 + \frac{12}{\ell^2}v_1\theta_{z2} - \frac{12}{\ell^2}v_2\theta_{z1} + \frac{4}{\ell}\theta_{z1}\theta_{z2} - \frac{12}{\ell^2}v_2\theta_{z2}\right)$$

qui se réécrit : $E_{pot.} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}^T \bullet \frac{EI_z}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$

On obtient une forme quadratique des degrés de liberté v_1, v_2 et θ_{z1}, θ_{z2} que l'on doit identifier à l'expression :

$$\underset{\text{élément}}{E_{pot.}} = \frac{1}{2}\{d\}^T_{él} \bullet [k]_{él} \bullet \{d\}_{él}$$

Il apparaît ainsi la matrice de raideur : $[\mathrm{k}]_{\text{él}} = \dfrac{EI_z}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$

Le comportement de l'élément poutre en flexion plane dans son repère local s'écrit donc :

$$\{F\}_{\text{él}} = [\mathrm{k}]_{\text{él}} \bullet \{d\}_{\text{él}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} Y_1 \\ N_1 \\ Y_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$