ELABORATION DE LA MATRICE DE RAIDEUR DE L'ELEMENT BARRE

OBJECTIFS

Cet exercice à pour but de découvrir toutes les étapes permettant d'élaborer la matrice de raideur d'un élément fini barre sollicité en traction-compression.

① - écrire l'expression analytique de l'énergie de déformation où apparaît le déplacement d'un point courant

② - exprimer la fonction déplacement d'un point courant en fonction des déplacements nodaux à partir des relations d'équilibre et de comportement

③ - introduire l'expression du déplacement d'un point courant dans l'expression de l'énergie de déformation

④ - faire apparaitre une forme quadratique des déplacements nodaux dans l'expression de l'énergie de déformation

⑤ - identifier l'expression de l'énergie de déformation avec celle issue d'une écriture généralisée

⑥ - extraire la matrice de raideur de l'élément fini

◆ **Rappels** : sollicitation de traction (ou de compression) pure sur une poutre

Eléments de réduction du torseur de cohésion au centre G de la section droite d'une poutre, de ligne moyenne l'axe $\vec{x}$, se réduisent à : $\{Coh\}_G = \left\{ \begin{matrix} \mathcal{N}\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$, avec $\mathcal{N}$: effort normal

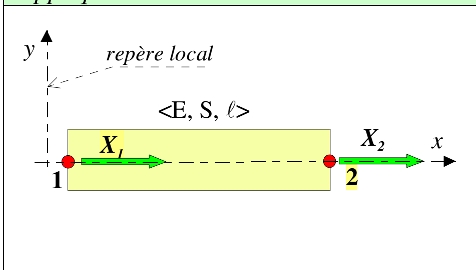
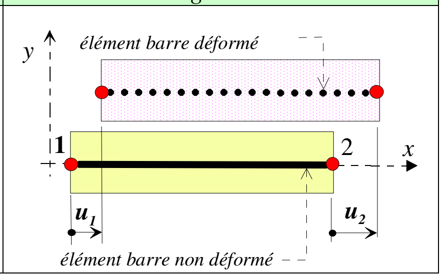
Les déplacements correspondant sont des allongements ou raccourcissements suivant l'axe $\vec{x}$ notés u(x).

La relation de comportement s'écrit : $\mathcal{N} = \mathrm{ES}\dfrac{\mathrm{du(x)}}{\mathrm{dx}}$

◆ **Matrice de raideur**

❍ Définition de l'élément.

C'est un tronçon de barre de longueur ℓ. Il a pour propriété de matériau un module d'élasticité longitudinal E et pour seule propriété de section droite l'aire S de cette section. Cet élément est représenté et modélisé pour le calcul par sa ligne moyenne. Les centres géométriques des sections d'extrémités notés (1) et (2) sont les nœuds de l'élément. Le repère (*xy*) lié à l'élément est le "repère local".

Actions mécaniques extérieures appliquées aux nœuds de l'élément barre	*Déplacements nodaux et déformée engendrés*
	

Le chargement de cet élément consiste en des forces $X_1\vec{x}$ au nœud (1) et $X_2\vec{x}$ au nœud (2). Les degrés de liberté associés sont **donc** les déplacements $u_1\vec{x}$ au nœud (1) et $u_2\vec{x}$ au nœud (2), soit au total deux d.d.l. pour l'élément.

Pour toute section droite intermédiaire d'abscisse x ($0 \le x \le \ell$), le déplacement longitudinal est noté u(x) avec $u(0) = u_1$ et $u(\ell) = u_2$.

❍ Expression du déplacement u(x)

On rappelle l'expression de l'énergie de déformation $E_{pot.}$ (Cf. énergétique des structures) à partir du déplacement u(x) de toute section droite d'abscisse x de la barre de longueur ℓ : $E_{pot.} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\ell \mathrm{ES}\left(\dfrac{\mathrm{du(x)}}{\mathrm{dx}}\right)^2 \mathrm{dx}$

Pour calculer $E_{pot.}$, il faut donc connaître la loi d'évolution u(x). L'élément étant chargé uniquement en ses extrémités, l'effort normal $\vec{\mathcal{N}}$ y est constant. Soit : $\mathcal{N} = \mathrm{ES}\dfrac{\mathrm{du(x)}}{\mathrm{dx}} = C^{te}$.

Ceci permet d'obtenir une expression très simple de la fonction déplacement : u (x) = ax + b

Calcul des constantes a et b en fonction des déplacements u_1 et u_2 des nœuds (ou d.d.l. de l'élément) en faisant intervenir les conditions aux limites :

pour x = 0 : $u(0) = u_1$, soit $u_1 = 0 + b$, d'où $b = u_1$

pour $x = \ell$: $u(\ell) = u_2$, soit $u_2 = a\ell + u_1$, d'où $a = \dfrac{u_2 - u_1}{\ell}$

La fonction déplacement u(x) s'écrit : $u(x) = ax + b = \left(\dfrac{u_2 - u_1}{\ell}\right)x + u_1$

on peut aussi la présenter sous forme matricielle : $u(x) = \underbrace{\left[\left(1 - \dfrac{x}{\ell}\right) \quad \dfrac{x}{\ell}\right]}_{\substack{\textit{matrice ligne} \\ (1\times 2)}} \bullet \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}}_{\substack{\textit{matrice colonne} \\ (2\times 1)}}$

La matrice ligne (1×2) "fonction d'espace" (c'est-à-dire de la variable x) qui apparaît ici est appelée **matrice d'interpolation**. Elle permet d'exprimer le déplacement de toute section droite en fonction des déplacements des nœuds.

❍ Détermination de la matrice de raideur

La dérivée de la fonction déplacement s'écrit : $\dfrac{du(x)}{dx} = \dfrac{u_2 - u_1}{\ell}$

Alors l'énergie de déformation rappelée plus haut devient : $E_{pot.} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\ell} ES\left(\dfrac{du(x)}{dx}\right)^2 dx = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\ell} ES\left(\dfrac{u_2 - u_1}{\ell}\right)^2 dx$

$$E_{pot.} = \frac{1}{2}\frac{ES}{\ell}(u_2 - u_1)^2 = \frac{1}{2}\frac{ES}{\ell}\left(u_1{}^2 + u_2{}^2 - 2u_2u_1\right)$$

On obtient une forme quadratique des degrés de liberté u_1 et u_2, que l'on peut ramener à l'écriture :

$$\underset{\text{élément}}{E_{pot.}} = \frac{1}{2}\{d\}^T_{él} \bullet [k]_{él} \bullet \{d\}_{él}$$

A partir de cette expression, pour déterminer la matrice de raideur de l'élément on peut écrire en première étape:

$$E_{pot.} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{matrice ligne} \\ (1\times 2)}} \bullet \underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{ES}{\ell}u_1 - \dfrac{ES}{\ell}u_2 \\ -\dfrac{ES}{\ell}u_1 + \dfrac{ES}{\ell}u_2 \end{Bmatrix}}_{\substack{\textit{matrice colonne} \\ (2\times 1)}}$$

$$\text{et ensuite : } E_{pot.} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} \dfrac{ES}{\ell} & -\dfrac{ES}{\ell} \\ -\dfrac{ES}{\ell} & \dfrac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

par identification avec la forme quadratique générale de l'énergie de déformation, on fait apparaître la matrice de raideur de l'élément barre en traction-compression :

$$\underset{\text{élément}}{[k]} = \begin{bmatrix} \dfrac{ES}{\ell} & -\dfrac{ES}{\ell} \\ -\dfrac{ES}{\ell} & \dfrac{ES}{\ell} \end{bmatrix}$$

on en déduit que le comportement de cet élément s'écrit :

$$\{F\}_{él} = [k]_{él} \bullet \{d\}_{él} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{ES}{\ell} & -\dfrac{ES}{\ell} \\ -\dfrac{ES}{\ell} & \dfrac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$