MATRICE DE RAIDEUR D'UN ELEMENT FINI BARRE+POUTRE

⇨ Problème :

On considère les éléments finis de longueur identique de la figure suivante que l'on se propose d'assembler comme indiqué.
Ecrire la matrice de raideur de la structure obtenue après assemblage.

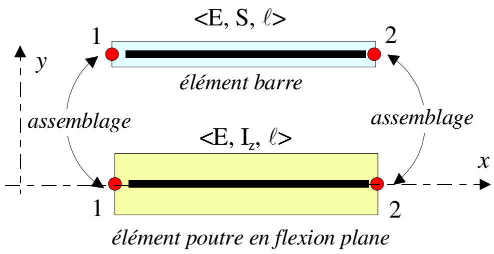
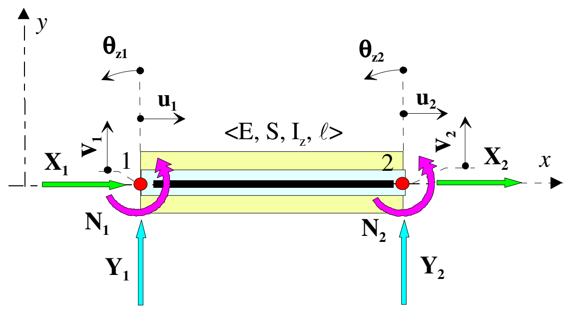


figure Erreur ! Il n'y a pas de texte répondant à ce style dans ce document.**-1**

⇨ Résolution :

L'assemblage conduit à la structure à deux nœuds avec six chargements et six d.d.l. associés. La matrice de raideur de cette structure possède donc 6 lignes et 6 colonnes.



$\{F\}_{str}$	$\{d\}_{str}$
X_1	u_1
Y_1	v_1
N_1	θ_{z1}
X_2	u_2
Y_2	v_2
N_2	θ_{z2}

On connaît les matrices de raideur de chacun des deux éléments ainsi que les énergies de déformation associées. On a ainsi :

$$\underset{\text{structure}}{E_{\text{pot.}}} = \frac{1}{2}\{d\}^{T}_{str} \bullet [K]_{str} \bullet \{d\}_{str}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\text{structure}}{E_{\text{pot.}}} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^{T} \bullet \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}^{T} \bullet \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

qui conduit à la matrice de raideur (6×6) de la structure. On peut aussi la faire apparaître en recalant la matrice de raideur de chaque élément dans un tableau de dimensions (6×6), soit :

$$[K]_{str} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ES}{\ell} & 0 & 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\textit{matrice de raideur de l'élément barre recalée}(6\times 6)} + \underbrace{\frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\ell & 0 & -12 & 6\ell \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & 0 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6\ell & 0 & 12 & -6\ell \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}}_{\textit{matrice de raideur de l'élément poutre en flexion recalée}(6\times 6)}$$

$$[K]_{str} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & 0 & 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

matrice de raideur de l'élément poutre équivalent (6×6)

et on obtient pour relation de comportement :

$$\{F\}_{str} = [K]_{str} \bullet \{d\}_{str} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ N_1 \\ X_1 \\ Y_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \underset{(6\times6)}{[K]_{str}} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

REMARQUES

❒ On voit sur l'expression de la matrice de raideur que les matrices de raideur des deux éléments de base s'additionnent sans véritablement se combiner, du fait que leurs d.d.l. initiaux sont distincts.

❒ Cette association fournit un élément poutre équivalent qui possède simultanément un comportement de flexion plane simple et un comportement de traction compression. Il est ainsi plus performant que chacun des éléments de base qui le constituent.