

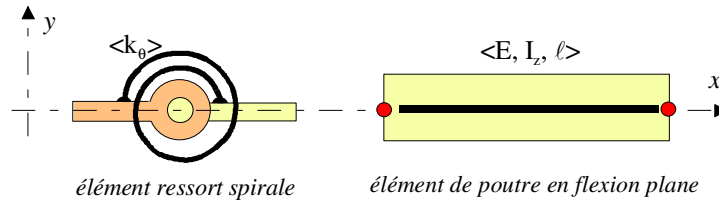
ASSEMBLAGE ELEMENTS FINIS RESSORT SPIRALE-POUTRE

⇒ **Problème :**

On considère les éléments finis schématisés sur la figure suivante que l'on se propose d'assembler.

1) écrire la matrice de raideur de la structure obtenue après assemblage ainsi que la relation de comportement $\{F\}_{str} = [k]_{str} \cdot \{d\}_{str}$ correspondante.

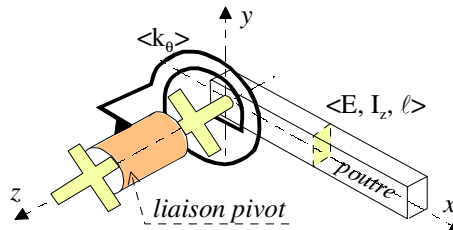
2) on encastre l'extrémité gauche de la liaison pivot du ressort spirale. Calculer les déplacements nodaux et l'action de liaison lorsqu'on exerce un effort transverse, parallèle à l'axe \vec{y} , sur l'extrémité droite de l'élément poutre en flexion plane.



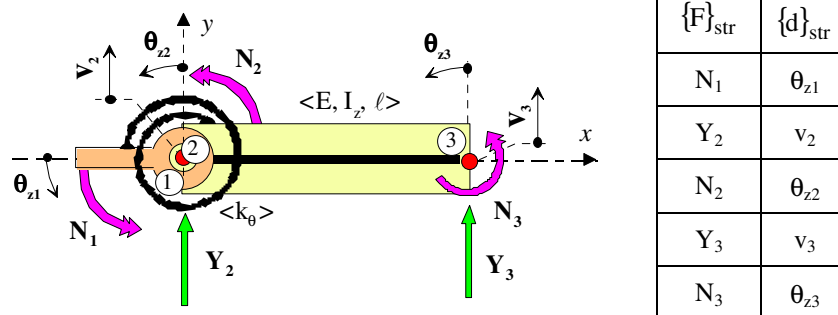
⇒ **Résolution :**

1) Détermination de la matrice de raideur globale de la structure.

Schéma de principe technologique de cet assemblage :



L'assemblage de ces deux éléments conduit à la structure à trois nœuds, cinq sollicitations et cinq d.d.l. associés.



Les matrices de raideur de l'élément ressort spirale et de l'élément poutre en flexion plane sont connues (cf. exercices) ainsi que les expressions des énergies potentielles de déformation correspondantes. :

$$E_{pot. structure} = \frac{1}{2} \{d\}_{str}^T \cdot [K]_{str} \cdot \{d\}_{str}$$

$$\Downarrow$$

$$E_{pot. structure} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}^T \cdot \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}$$

qui permet de faire apparaître la matrice de raideur (5x5) de la structure.

On peut également recalculer la matrice de raideur de chaque élément dans un tableau qui a la dimension (5x5) de $[K]_{str}$, soit :

$$[K]_{\text{str}} = \begin{bmatrix} k_\theta & 0 & -k_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_\theta & 0 & k_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\theta_{z1} \\ \dots\dots v_2 \\ \dots\dots\theta_{z2} \\ \dots\dots v_3 \\ \dots\dots\theta_{z3} \end{matrix}$$

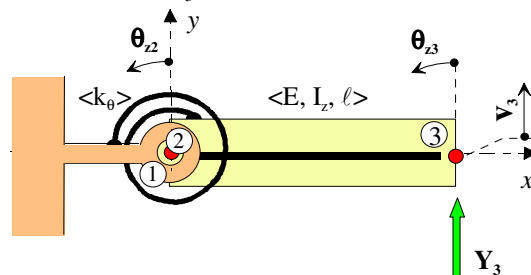
$$[K]_{\text{str}} = \begin{bmatrix} k_\theta & 0 & -k_\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ -k_\theta & \frac{6EI}{\ell^2} & \left(k_\theta + \frac{4EI}{\ell}\right) & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

et on obtient pour relation de comportement : $\{F\}_{\text{str}} = [K]_{\text{str}} \cdot \{d\}_{\text{str}} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} N_1 \\ Y_2 \\ N_2 \\ Y_3 \\ N_3 \end{Bmatrix} = [K]_{\text{str}} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}$

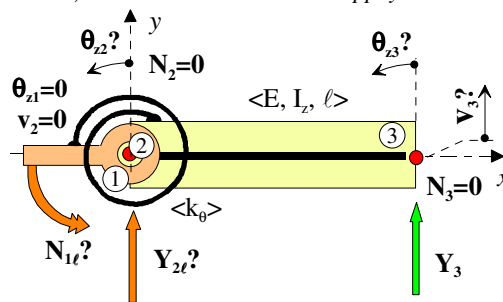
(5x5)

On a pu constater que le déterminant principal de chacune des deux matrices $[k]_{el}$ était nul. On vérifie alors facilement ici que le déterminant principal de $[K]_{\text{str}}$ est nul (matrice singulière) ce qui est normal puisque la structure étudiée n'est pas convenablement appuyée (mip non complète donc mouvements d'ensemble possibles en translation suivant \vec{y} et en rotation autour de \vec{z}).

2) Application des conditions aux limites: encastrons l'extrémité gauche de la liaison pivot du ressort spirale, la structure étant soumise à droite à un effort transverse Y_3 .



a) structure convenablement appuyée



b) même structure isolée

A partir de la structure isolée, la relation de comportement $\{F\}_{\text{str}} = [K]_{\text{str}} \cdot \{d\}_{\text{str}}$ devient :

$$\begin{Bmatrix} N_{1\ell} \\ Y_{2\ell} \\ N_2 = 0 \\ Y_3 \\ N_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\theta & 0 & -k_\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ -k_\theta & \frac{6EI}{\ell^2} & \left(k_\theta + \frac{4EI}{\ell}\right) & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \theta_{z1} = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}$$

dans laquelle $N_{1\ell}$ et $Y_{2\ell}$ sont maintenant les actions mécaniques de liaison transmises par la partie gauche de la liaison pivot sur l'axe de cette liaison.

Pour résoudre ce système linéaire, on commence par supprimer les deux lignes et les deux colonnes de même rang correspondant aux d.d.l. $\theta_{z1} = v_2 = 0$.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ Y_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(k_\theta + \frac{4EI}{\ell}\right) & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}$$

en inversant cette "sous matrice" on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_\theta} & \frac{1}{k_\theta} & \frac{1}{k_\theta} \\ \frac{\ell}{k_\theta} & \left(\frac{\ell^3}{3EI} + \frac{\ell^2}{k_\theta}\right) & \left(\frac{\ell^2}{2EI} + \frac{\ell}{k_\theta}\right) \\ \frac{1}{k_\theta} & \left(\frac{\ell^2}{2EI} + \frac{\ell}{k_\theta}\right) & \left(\frac{\ell}{EI} + \frac{1}{k_\theta}\right) \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} 0 \\ Y_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

qui permet d'obtenir les déplacements des nœuds demeurés libres, soit :

$$\theta_{z2} = \frac{Y_3 \times \ell}{k_\theta}; \quad v_3 = Y_3 \left(\frac{\ell^3}{3EI} + \frac{\ell^2}{k_\theta} \right); \quad \theta_{z3} = Y_3 \left(\frac{\ell^2}{2EI} + \frac{\ell}{k_\theta} \right)$$

On revient ensuite sur les lignes qui avaient été supprimées dans, soit : $\begin{Bmatrix} N_{1\ell} \\ Y_{2\ell} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\theta & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}$

Les valeurs trouvées pour les d.d.l. permettent alors d'écrire :

$$N_{1\ell} = -k_\theta \times \theta_{z2} = -Y_3 \times \ell$$

$$Y_{2\ell} = \frac{6EI}{\ell^2} \theta_{z2} - \frac{12EI}{\ell^3} v_3 + \frac{6EI}{\ell^2} \theta_{z3} = -Y_3$$

Ces résultats permettent de vérifier immédiatement que l'équilibre global du modèle est respecté.