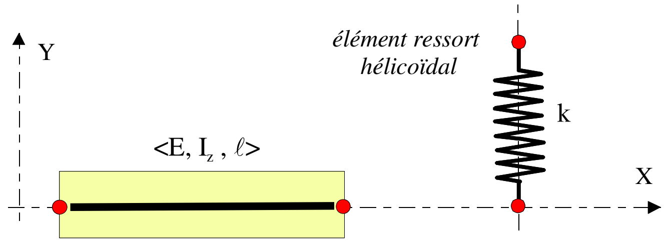
ASSEMBLAGE ELEMENTS FINIS RESSORT HELICOIDAL-POUTRE

⇨ Problème *:*

On considère les éléments finis schématisés sur la figure suivante, que l'on se propose d'assembler.



élément poutre en flexion plane

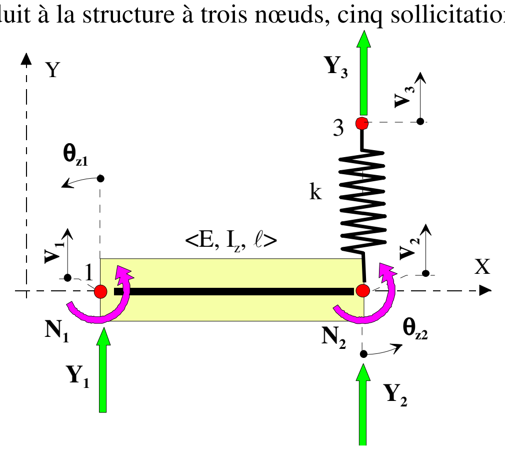
1) Ecrire la matrice de raideur de la structure obtenue après assemblage dans le repère global (XY), ainsi que la relation de comportement $\{F\}_{str} = [k]_{str} \bullet \{d\}_{str}$ correspondante.

2) On encastre l'élément poutre en flexion plane simple à l'extrémité gauche, ainsi que l'extrémité supérieure de l'élément ressort hélicoïdal. On soumet la structure à un moment $N_2\vec{z}$ et une force $Y_2\vec{y}$ sur l'extrémité droite de l'élément poutre. Calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison.

3) Cas particulier : on suppose que le ressort a une très grande raideur notée $k = 10^6 \times \dfrac{EI}{\ell^3}$ et que l'effort suivant $\vec{y}$ est très élevé et tel que $Y_2 \times \ell = 10^6 \times N_2$. En posant $\Delta = \dfrac{Y_2}{k}$, montrer que ce cas particulier revient à imposer un déplacement de valeur Δ à l'extrémité droite de l'élément poutre en flexion.

⇨ Résolution *:*

1) L'assemblage conduit à la structure à trois nœuds, cinq sollicitations et cinq d.d.l. associés.



$\{F\}_{str}$	$\{d\}_{str}$
Y_1	v_1
N_1	θ_{z1}
Y_2	v_2
N_2	θ_{z2}
Y_3	v_3

Les matrices de raideur de l'élément poutre en flexion et de l'élément ressort sont connues (cf. exercices) :

$$\underset{\text{structure}}{E_{pot.}} = \frac{1}{2}\{d\}_{str}^T \bullet [K]_{str} \bullet \{d\}_{str}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\text{structure}}{E_{pot.}} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}^T \bullet \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

qui conduit à la matrice de raideur (5×5) de la structure. On peut aussi la faire apparaître en recalant la matrice de raideur de chaque élément dans un tableau de dimension (5×5), soit

$$E_{\substack{pot.\\ structure}} = \frac{1}{2}\{d\}_{str}^{T} \bullet [K]_{str} \bullet \{d\}_{str}$$

$$\Updownarrow$$

$$[K]_{str} = \frac{EI}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell & 0 \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdots\cdots v_1 \\ \cdots\cdots \theta_{z1} \\ \cdots\cdots v_2 \\ \cdots\cdots \theta_{z2} \\ \cdots\cdots v_3 \end{array}$$

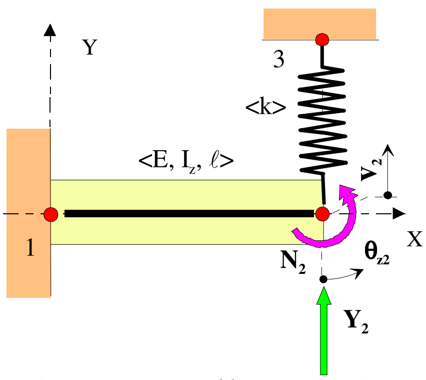
:

$$[K]_{str} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \left(\frac{12EI}{\ell^3}+k\right) & -\frac{6EI}{\ell^2} & -k \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix}$$

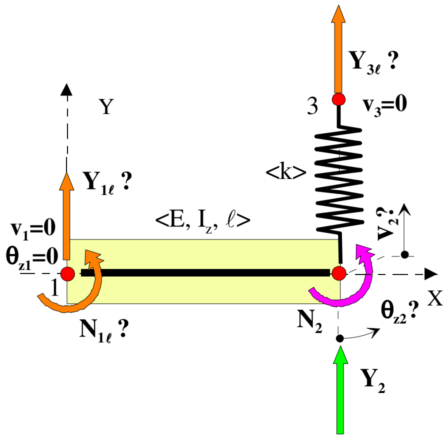
et on obtient pour relation de comportement : $\{F\}_{str} = [K]_{str} \bullet \{d\}_{str} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} Y_1 \\ N_1 \\ Y_2 \\ N_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \underset{(5\times5)}{[K]_{str}} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \end{Bmatrix}$

On note ici que la structure "flotte" (deux mouvements d'ensemble possibles dans le plan (XY) dans le sens des sollicitations, soit une translation suivant $\vec{y}$ et une rotation autour de $\vec{z}$). La matrice $[K]_{str}$ précédente est donc singulière et ne peut pas s'inverser.

2) Encastrons l'élément poutre en flexion à gauche, ainsi que l'extrémité supérieure de l'élément ressort. La structure est soumise à N_2 et Y_2.



a) structure convenablement appuyée



b) même structure isolée

A partir de la structure isolée la relation de comportement devient :

$$\{F\}_{str} = [K]_{str} \bullet \{d\}_{str}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{Bmatrix} Y_{1\ell} \\ N_{1\ell} \\ Y_2 \\ N_2 \\ Y_{3\ell} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \left(\frac{12EI}{\ell^3}+k\right) & -\frac{6EI}{\ell^2} & -k \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_{z1} = 0 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix}$$ **[** Erreur ! Il n'y a pas de texte répondant à ce style dans ce document.**-1]**

dans laquelle $Y_{1\ell}$, $N_{1\ell}$ et $Y_{3\ell}$ sont maintenant les actions mécaniques de liaison transmises par le "bâti" sur la structure.
Résolution du système linéaire, on supprime les trois lignes correspondant aux d.d.l. nuls et les trois colonnes de même rang. Il reste :

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{12EI}{\ell^3}+k\right) & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

En inversant cette relation on obtient :

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(k+\frac{3EI}{\ell^3}\right)} & \frac{3}{2}\frac{1}{\left(k\ell+\frac{3EI}{\ell^2}\right)} \\ \frac{3}{2}\frac{1}{\left(k\ell+\frac{3EI}{\ell^2}\right)} & \frac{\ell}{4EI}+\frac{9}{4\left(k\ell^2+\frac{3EI}{\ell}\right)} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} Y_2 \\ N_2 \end{Bmatrix}$$

qui permet de déterminer les déplacements des nœuds demeurés libres, soit :

$$v_2 = \frac{Y_2}{\left(k+\frac{3EI}{\ell}\right)} + \frac{3}{2}\frac{N_2}{\left(k\ell+\frac{3EI}{\ell^2}\right)}$$

$$\theta_{z2} = \frac{3}{2}\frac{Y_2}{\left(k\ell+\frac{3EI}{\ell^2}\right)} + N_2\left[\frac{\ell}{4EI}+\frac{9}{4\left(k\ell^2+\frac{3EI}{\ell}\right)}\right]$$

En revenant aux lignes qui avaient été supprimées dans, c'est-à-dire au système :

$$\begin{Bmatrix} Y_{1\ell} \\ N_{1\ell} \\ Y_{3\ell} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -k & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

les valeurs trouvées pour les d.d.l. libres v_2 et θ_{z2} permettent d'écrire :

$$Y_{1\ell} = -\frac{12EI}{\ell^3}v_2 + \frac{6EI}{\ell^2}\theta_{z2}$$

$$Y_{1\ell} = Y_2\left[\frac{9}{\left(\frac{k\ell^3}{EI}+3\right)} - \frac{1}{\left(\frac{k\ell^3}{12EI}+\frac{1}{4}\right)}\right] + 3N_2\left[\frac{1}{2\ell}+\frac{9}{\left(\frac{2k\ell^4}{EI}+6\ell\right)} - \frac{6}{\left(\frac{k\ell^4}{EI}+3\ell\right)}\right]$$

$$N_{1\ell} = -\frac{6EI}{\ell^2} v_2 + \frac{2EI}{\ell}\theta_{z2}$$

$$N_{1\ell} = Y_2\left[\frac{1}{\left(\frac{k\ell^2}{3EI}+\frac{1}{\ell}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{k\ell^2}{6EI}+\frac{1}{2\ell}\right)}\right] + N_2\left[\frac{1}{2} + \frac{9}{\left(\frac{2k\ell^3}{EI}+6\right)} - \frac{1}{\left(\frac{k\ell^3}{9EI}+\frac{1}{3}\right)}\right]$$

$$Y_{3\ell} = -kv_2 = -\frac{Y_2}{\left(\frac{3EI}{k\ell^3}+1\right)} - \frac{3}{2}\frac{N_2}{\left(\frac{3EI}{k\ell^2}+\ell\right)}$$

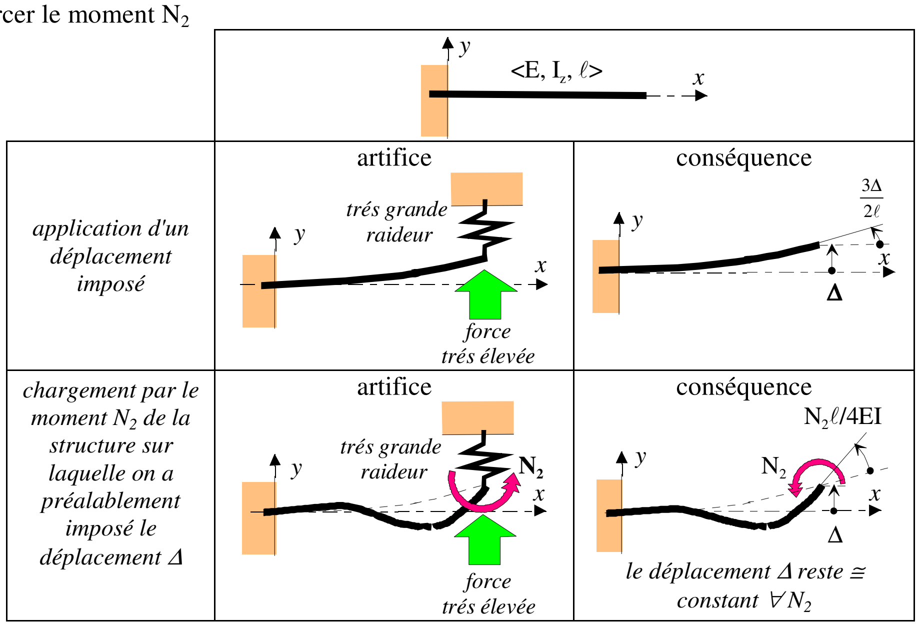
3) Cas particulier : $k = 10^6 \times \frac{EI}{\ell^3}$, $Y_2 \times \ell = 10^6 \times N_2$, $\Delta = \frac{Y_2}{k}$.

En désignant par ε, ε', ε'' <<1 des quantités négligeables, les déplacements deviennent alors:

$$v_2' = \frac{Y_2}{k(1+\varepsilon)} + \varepsilon'\frac{Y_2}{k(1+\varepsilon)} \cong \frac{Y_2}{k} = \Delta$$

$$\theta_{z2}' = \frac{3}{2\ell}\frac{Y_2}{k(1+\varepsilon)} + N_2\frac{\ell}{4EI} + \frac{\varepsilon''}{\ell}\frac{Y_2}{k(1+\varepsilon)} \cong \frac{3}{2}\frac{\Delta}{\ell} + N_2\frac{\ell}{4EI}$$

En plaçant un ressort de très grande rigidité k et en exerçant une très grande force Y_2 de façon à obtenir une valeur requise $\Delta = \frac{Y_2}{k}$, on voit que tout se passe comme si l'on imposait un déplacement Δ à l'extrémité de l'élément poutre en flexion encastré avant d'exercer le moment N_2



Application d'un déplacement de valeur imposée

Remarques

❒ Cet artifice permet d'imposer des déplacements (linéaires ou angulaires) en des endroits déterminés des structures. Ces déplacements restent alors insensibles à l'intensité des sollicitations "réelles" que l'on est susceptible d'exercer par la suite.

❒ Cette méthode est couramment exploitée dans les codes de calcul pour imposer des conditions aux limites non nulles en déplacements.