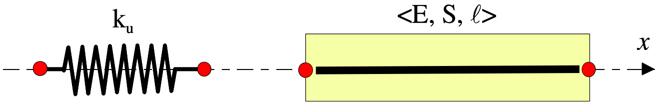
ASSEMBLAGE ELEMENTS FINIS RESSORT HELICOIDAL-BARRE

⇨ Problème :

On considère les éléments finis schématisés sur la figure que l'on se propose d'assembler.

1) écrire la matrice de raideur de la structure obtenue après assemblage ainsi que la relation de comportement $\{F\}_{str} = [k]_{str} \bullet \{d\}_{str}$ correspondante.

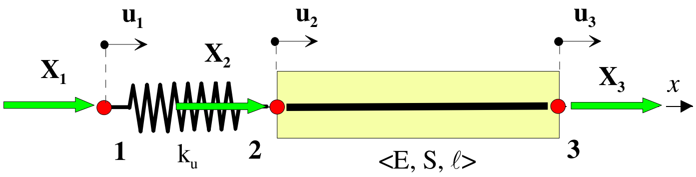
2) on fixe l'extrémité gauche de l'élément ressort hélicoïdal. Calculer les déplacements nodaux et l'action de liaison lorsqu'on exerce un effort de traction sur l'extrémité droite de l'élément barre.



élément ressort hélicoïdal *élément barre*

⇨ Résolution :

1) l'assemblage conduit à la structure à trois nœuds, trois efforts et trois d.d.l. associés représenté sur la figure suivante. La matrice de raideur de cette structure possède donc trois lignes et trois colonnes.



$\{F\}_{str}$	$\{d\}_{str}$
X1	u1
X2	u2
X3	u3

Les matrices de raideur de l'élément ressort hélicoïdal et de l'élément barre sont connues (voir ex. d'application) ainsi que les expressions des énergies potentielles de déformation correspondantes.

On a ainsi : $\underset{\text{structure}}{E_{pot.}} = \frac{1}{2}k_u(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2) + \frac{1}{2}\frac{ES}{\ell}(u_2^2 + u_3^2 - 2u_2u_3)$

soit : $\underset{\text{structure}}{E_{pot.}} = \frac{1}{2}\left[k_u u_1^2 + \left(k_u + \frac{ES}{\ell}\right)u_2^2 + \frac{ES}{\ell}u_3^2 - 2k_u u_1 u_2 - 2\frac{ES}{\ell}u_2 u_3\right]$

que l'on sait mettre sous la forme :

$$\underset{\text{structure}}{E_{pot.}} = \frac{1}{2}\{d\}_{str}^T \bullet [K]_{str} \bullet \{d\}_{str}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\text{structure}}{E_{pot.}} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^T \bullet \begin{bmatrix} k_u & -k_u & 0 \\ -k_u & \left(k_u + \frac{ES}{\ell}\right) & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

pour faire apparaître la matrice de raideur de la structure.

Remarque

❒ On peut aussi recaler la matrice de raideur de chacun des éléments dans un tableau qui a la dimension de $[K]_{str}$ soit (3×3).

On écrit alors à partir des matrices de raideur de chacun des deux éléments :

$$[K]_{str} = \begin{bmatrix} k_u & -k_u & 0 \\ -k_u & k_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} k_u & -k_u & 0 \\ -k_u & \left(k_u + \frac{ES}{\ell}\right) & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdots u_1 \\ \cdots u_2 \\ \cdots u_3 \end{array}$$

et on obtient pour relation de comportement :

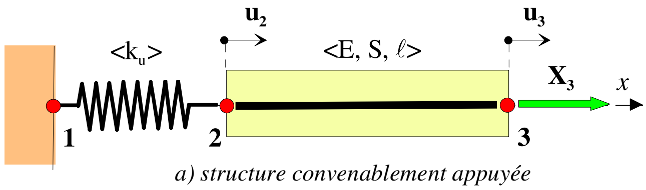
$$\{F\}_{str}=[K]_{str}\bullet\{d\}_{str}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_u & -k_u & 0\\ -k_u & \left(k_u+\frac{ES}{\ell}\right) & -\frac{ES}{\ell}\\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell}\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}$$

Si l'on calcule le déterminant principal de cette matrice, on trouve :

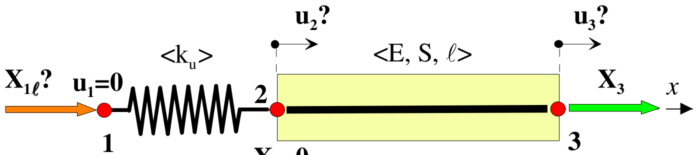
$$k_u\left[\left(k_u+\frac{ES}{\ell}\right)\times\frac{ES}{\ell}-\left(\frac{ES}{\ell}\right)^2\right]+k_u\times\left(-k_u\frac{ES}{\ell}\right)=0$$

C'est une matrice singulière, ce qui était prévisible puisque cette structure convenablement appuyée (mip non complète).

2) fixons l'extrémité gauche du ressort, la structure étant soumise à droite à un effort de traction X3 (ici X2=0). On a



a) structure convenablement appuyée



b) même structure isolée

A partir de la structure isolée de la relation de comportement s'écrit pour ces conditions aux limites :

$$\{F\}_{str}=[K]_{str}\bullet\{d\}_{str}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}X_{1\ell}\\X_2=0\\X_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_u & -k_u & 0\\ -k_u & \left(k_u+\frac{ES}{\ell}\right) & -\frac{ES}{\ell}\\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell}\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}u_1=0\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}$$

dans laquelle X1 est maintenant l'effort transmis par la liaison.

Supprimons la ligne et la colonne de même rang correspondant au d.d.l. $u_1=0$; il reste : $\begin{Bmatrix}0\\X_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(k_u+\frac{ES}{\ell}\right) & -\frac{ES}{\ell}\\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell}\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}$

En inversant cette relation, on obtient : $\begin{Bmatrix}u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{k_u} & \frac{1}{k_u}\\ \frac{1}{k_u} & \left(\frac{1}{k_u}+\frac{\ell}{ES}\right)\end{bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}0\\X_3\end{Bmatrix}$

qui permet d'obtenir les déplacements des nœuds demeurés libres : $u_2=\frac{X_3}{k_u}$ et $u_3=X_3\left(\frac{1}{k_u}+\frac{\ell}{ES}\right)$

Revenons à la ligne qui avait été supprimée dans la relation elle s'écrit : $X_{1\ell}=-k_u\times u_2+0\times u_3$

soit avec la valeur u_2 trouvée : $X_{1\ell}=-X_3$

Notons que ce résultat, évident dans ce cas simple, permet de vérifier immédiatement le bon équilibre global du modèle.
Ce résultat de vérifier immédiatement le bon équilibre global du modèle.