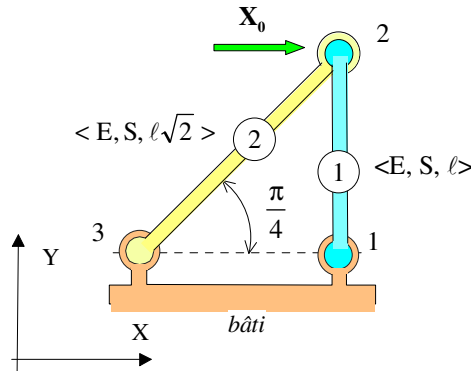


ASSEMBLAGE ELEMENTS FINIS DE 2 BARRES-TREILLIS

⇒ **Problème :**

On considère l'assemblage plan de deux éléments barres (même matériau, même section) représenté sur la figure suivante constituant une structure chargée comme indiqué. Les deux éléments barres sont en liaison pivot d'axe \vec{Z} avec un bâti.



- 1) Ecrire les d.d.l. et les matrices de raideur de chaque élément dans le repère global (XY).
- 2) Ecrire la matrice de raideur de la structure dans le repère global.
- 3) En tenant compte des liaisons et du chargement indiqué, calculer les déplacements nodaux et les actions de liaison dans le repère global.
- 4) Calculer les déplacements et les actions mécaniques nodales dans les repères locaux.
- 5) En déduire les contraintes normales dans les éléments.

⇒ **Résolution :**

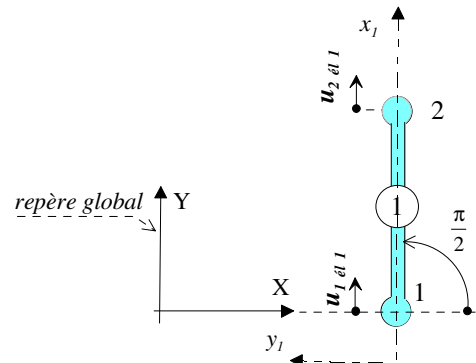
1) repère global :

♦ *Elément barre n°1* : sur la figure suivante on observe entre repère local et repère global la relation suivante :

$$\vec{x}_l = \vec{Y}, \vec{y}_l = -\vec{X}.$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \vec{x}_l \\ \vec{y}_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \end{Bmatrix}$$



On rappelle l'expression de la matrice de passage du repère global au repère local pour cet élément barre 2D

matrice de passage du repère global au repère local

$$[P] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & \dots & u_1 \\ -s & c & 0 & 0 & \dots & v_1 \\ 0 & 0 & c & s & \dots & u_2 \\ 0 & 0 & -s & c & \dots & v_2 \end{bmatrix}$$

$c = \cos \alpha ; s = \sin \alpha$

avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}_{\text{éll}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}_{\text{Global}} = [P]_{\text{éll}} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}_{\text{Global}}$$

On rappelle la matrice de raideur de l'élément barre dans le repère local, soit :

$$[k]_{\epsilon 11}^{Local} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \cdots \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{matrix} u_1 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 = 0 \end{matrix}$$

Pour obtenir la matrice de raideur dans le repère global $[k]_{\epsilon 1}^{Global}$ par l'opération: $[k]_{\epsilon 11}^{Global} = [P]_{\epsilon 11}^T \cdot [k]_{\epsilon 11}^{Local} \cdot [P]_{\epsilon 11}$

d'où successivement avec :

$$[k]_{\epsilon 11}^{Local} \cdot [P]_{\epsilon 11} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{\epsilon 11}^{Global} = [P]_{\epsilon 11}^T \cdot [k]_{\epsilon 11}^{Local} \cdot [P]_{\epsilon 11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

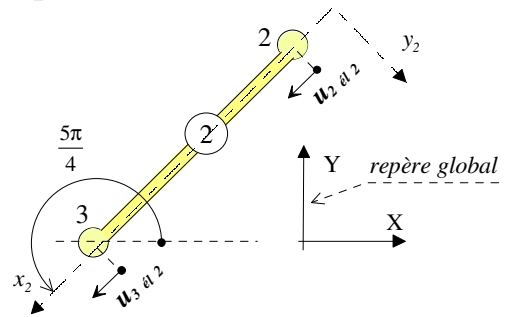
$$[k]_{\epsilon 11}^{Global} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix}$$

♦ *Elément barre n°2* : on observe la relation suivante entre repère local et repère global :

$$\vec{x}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{X} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{Y}, \quad \vec{y}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{X} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{Y}$$

soit sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$



En utilisant la matrice de passage du repère global au repère local pour cet élément barre 2D déjà rappelée précédemment

$$\text{On obtient avec } \alpha = \frac{5\pi}{4}, \text{ soit : } \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\epsilon 12}^{Local} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\epsilon 12}^{Global} = [P]_{\epsilon 12} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\epsilon 12}^{Global}$$

$$\text{La matrice de raideur dans le repère local s'écrit : } [k]_{\epsilon 12}^{Local} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix} \cdots \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{matrix} u_2 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 = 0 \end{matrix}$$

Calculons la matrice de raideur dans le repère global. On a successivement avec :

$$\begin{aligned}
[k]_{\epsilon 12}^{Local} \cdot [P]_{\epsilon 12} &= \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}
[k]_{\epsilon 12}^{Global} &= [P]_{\epsilon 12}^T \cdot [k]_{\epsilon 12}^{Local} \cdot [P]_{\epsilon 12} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[k]_{\epsilon 12}^{Global} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \\ -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2) Matrice de raideur de la structure complète dans le repère global :

Le nombre total des d.d.l. de la structure est $3 \times 2 = 6$ (trois nœuds possédant chacun deux d.d.l. dans le repère global), soit par exemple la liste : $\{d\}_{str}^{Global} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]_G$

Recalons les matrices de raideur précédemment écrites pour chacun des deux éléments dans un tableau 6×6 (dimensions de la matrice de raideur globale).

On obtient dans le repère global la somme suivante :

$$\begin{aligned}
[k]_{str}^{Global} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & 0 & \frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} \\ 0 & 0 & \frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} \\ 0 & 0 & -\frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} \\ 0 & 0 & -\frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots u_1 \\ \dots v_1 \\ \dots u_2 \\ \dots v_2 \\ \dots u_3 \\ \dots v_3 \end{matrix} \\
[k]_{str}^{Global} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES}{\ell} & \frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} & -\frac{ES}{\ell} \\ 0 & -\frac{ES}{\ell} & \frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} \\ 0 & 0 & \frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} \\ 0 & 0 & -\frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} \\ 0 & 0 & -\frac{2\ell}{ES} & -\frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} & \frac{2\ell}{ES} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots u_1 \\ \dots v_1 \\ \dots u_2 \\ \dots v_2 \\ \dots u_3 \\ \dots v_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

La relation de comportement s'écrit :

$$\left\{ \begin{matrix} F \\ \vdots \\ F \end{matrix} \right\}_{\text{str}} = \left[\begin{matrix} k \\ \vdots \\ k \end{matrix} \right]_{\text{str}} \bullet \left\{ \begin{matrix} d \\ \vdots \\ d \end{matrix} \right\}_{\text{str}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{matrix} \right\}_{\text{Global}} = \left[\begin{matrix} k \\ \vdots \\ k \end{matrix} \right]_{\text{str}} \bullet \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} \right\}_{\text{Global}}$$

3) déplacements nodaux et les actions de liaison dans le repère global

Les liaisons imposent : $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$. Le chargement est réduit à $X_0 \vec{X}$ au nœud (2).

La relation de comportement précédente devient:

$$\left\{ \begin{matrix} X_{1\ell} \\ Y_{1\ell} \\ X_2 = X_0 \\ Y_2 = 0 \\ X_{3\ell} \\ Y_{3\ell} \end{matrix} \right\}_{\text{Global}} = \frac{ES}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{matrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{matrix} \right\}_{\text{Global}}$$

où $X_{1\ell}, Y_{1\ell}, X_{3\ell}, Y_{3\ell}$ sont les actions mécaniques de liaison dans le repère global.

Résolution du système linéaire en supprimant les lignes correspondant aux d.d.l. bloqués et les colonnes de même rang.

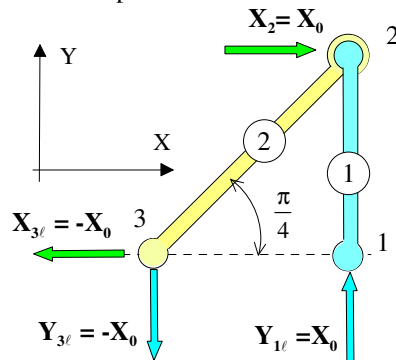
Il reste : $\left\{ \begin{matrix} X_2 = X_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{\text{Global}} = \frac{ES}{\ell} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\}_{\text{Global}}$ qui après inversion devient : $\left\{ \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\}_{\text{Global}} = \frac{\ell}{ES} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{matrix} X_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{\text{Global}}$

conduisant aux valeurs : $u_2 = 3 \frac{X_0 \ell}{ES}$ et $v_2 = -\frac{X_0 \ell}{ES}$

En revenant aux lignes et colonnes supprimées, c'est-à-dire au système : $\left\{ \begin{matrix} X_{1\ell} \\ Y_{1\ell} \\ X_{3\ell} \\ Y_{3\ell} \end{matrix} \right\}_{\text{Global}} = \frac{ES}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\}_{\text{Global}}$

les valeurs calculées de u_2 et v_2 nous donnent pour efforts de liaison : $X_{1\ell} = 0$; $Y_{1\ell} = X_0$; $X_{3\ell} = -X_0$; $Y_{3\ell} = -X_0$

Ces efforts sont mis en place sur la figure suivante. On peut ainsi s'assurer du bon équilibre global du modèle.



Forces nodales sur la structure

4) actions mécaniques nodales dans les repères locaux repères locaux

➤ Calcul des déplacements nodaux dans les repères locaux des éléments :

♦ élément n°1 :

$$\begin{aligned} u_{1\ell} = v_{1\ell} = 0; \quad v_{1\ell} = -u_{1\ell} = 0 \\ u_{2\ell} = v_{2\ell} = -\frac{X_0 \ell}{ES}; \quad v_{2\ell} = -u_{2\ell} = -3 \frac{X_0 \ell}{ES} \end{aligned}$$

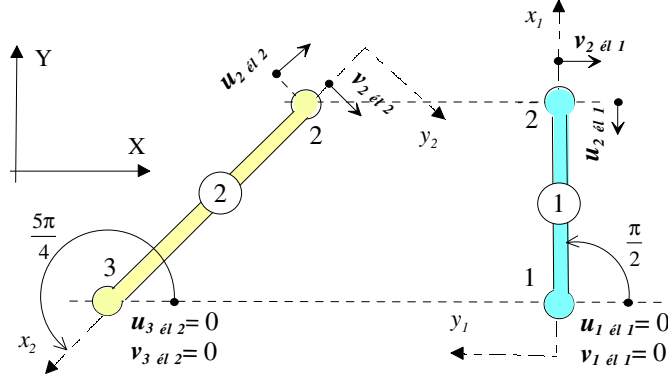
♦ élément n°2 :

$$u_{2\ell} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-u_2 - v_2) = -X_0 \frac{\ell \sqrt{2}}{ES};$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_2 - v_2) = X_0 \frac{\ell 2\sqrt{2}}{ES}$$

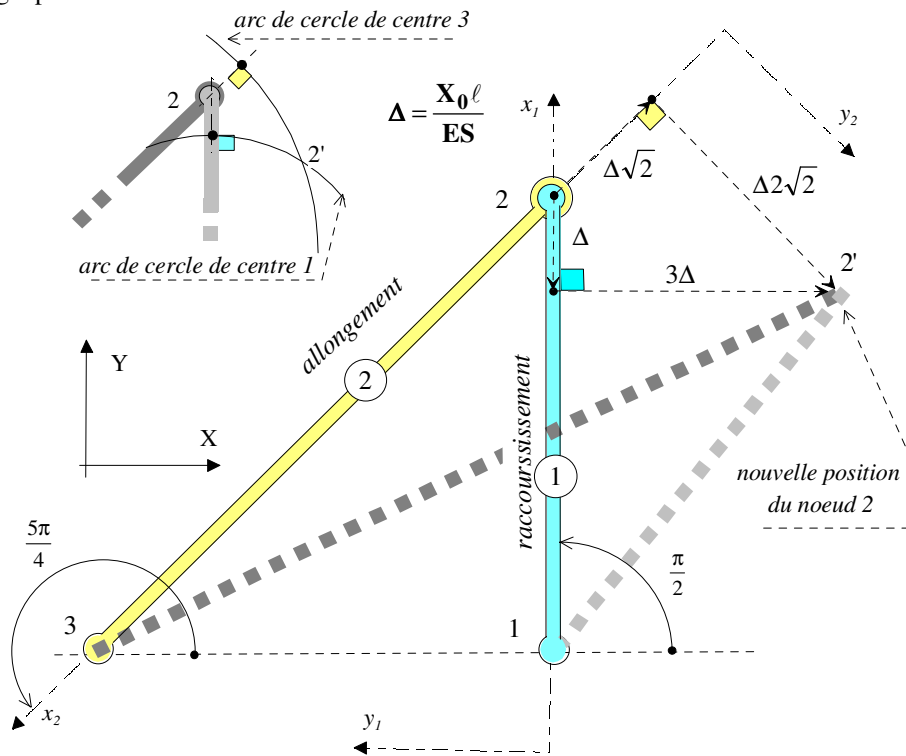
$$u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u_3 - v_3) = 0 ; v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_3 - v_3) = 0$$

Les repères locaux de chaque élément barre sont représentés sur la figure suivante



Repères locaux des éléments barres

Les déplacements locaux exprimés dans ces repères sont illustrés (très fortement exagérés) sur la figure. On remarque par exemple que l'élément n°1 atteint sa position finale à la suite d'une rotation d'ensemble de corps rigide autour de l'axe \vec{z}_1 et un raccourcissement suivant sa ligne moyenne. Seul ce raccourcissement est pris en compte dans l'énergie potentielle de déformation conformément à la définition d'un tel élément. La rotation d'ensemble n'entraîne pas de déformation de l'élément. C'est une propriété générale : les mouvements d'ensemble de type "corps rigide" ne déforment pas les structures. Leur contribution à l'énergie potentielle de déformation est donc nulle.



Déplacements nodaux sur les éléments barres (les arcs de cercles sont assimilés à leurs tangentes)

➤ Calcul des efforts nodaux :

La relation de comportement de l'élément n°1 s'écrit dans son repère local :

$$\begin{matrix} \{F\}_{\text{Local}} \\ \{F\}_{\text{Local}} \\ \{F\}_{\text{Local}} \end{matrix} = [k]_{\text{Local}} \cdot \begin{matrix} \{d\}_{\text{Local}} \\ \{d\}_{\text{Local}} \\ \{d\}_{\text{Local}} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{matrix} \\ \text{Local} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} ES & 0 & -ES & 0 \\ \ell & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ES & 0 & 0 \\ -\ell & 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Local} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix} \\ \text{Local} \end{matrix} \Big|_{\text{Local}}$$

Les valeurs u_2 et v_2 ayant été calculées plus haut pour l'élément n° 1, on déduit :

$$X_{1 \text{ él1}} = -\frac{ES}{\ell \text{ él1}} u_2 = X_0; \quad Y_1 = 0; \quad X_2 = \frac{ES}{\ell \text{ él1}} u_2 = -X_0; \quad Y_2 = 0$$

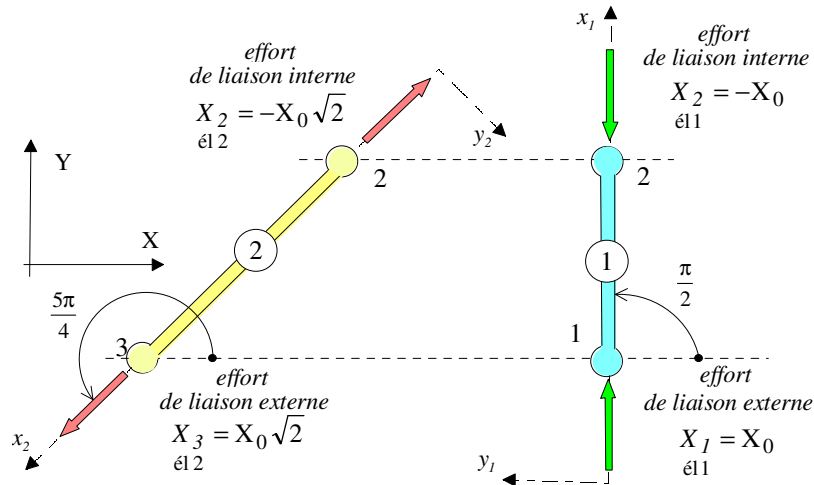
D'une manière analogue pour l'élément n°2 :

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix}_{\text{Local él2}} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{\ell} & 0 & -\frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ES}{\ell} & 0 & \frac{ES}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{Local él2}} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix}_{\text{Local él2}}$$

Les valeurs u_2 et v_2 ayant été calculées plus haut pour l'élément n° 2, on déduit :

$$X_2 = \frac{ES}{\ell \text{ él2}} u_2 = -X_0 \sqrt{2}; \quad Y_2 = 0; \quad X_3 = -\frac{ES}{\ell \text{ él2}} u_3 = X_0 \sqrt{2}; \quad Y_3 = 0$$

Les efforts nodaux ainsi calculés dans les repères locaux sont illustrés sur la figure suivante. On vérifie bien que l'élément n°1 est comprimé et que l'élément n°2 est tendu :



Forces nodales sur les éléments barres

5) Contraintes normales dans les éléments :

Expression du déplacement $u(x)$ de toute section droite d'un élément barre en fonction des déplacements des nœuds (cf. voir ex sur matrice de raideur d'un élément barre), on rappelle ici l'expression qui a été écrite en repère local; par exemple pour l'élément n°1 :

$$u(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad \frac{x}{\ell} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{\text{Local}}$$

La relation de comportement à l'effort normal s'écrit alors : $\mathcal{N} = ES \frac{du(x)}{dx} = \frac{ES}{\ell} (u_2 - u_1) = \frac{ES}{\ell} \times -\frac{X_0 \ell}{ES} = -X_0$

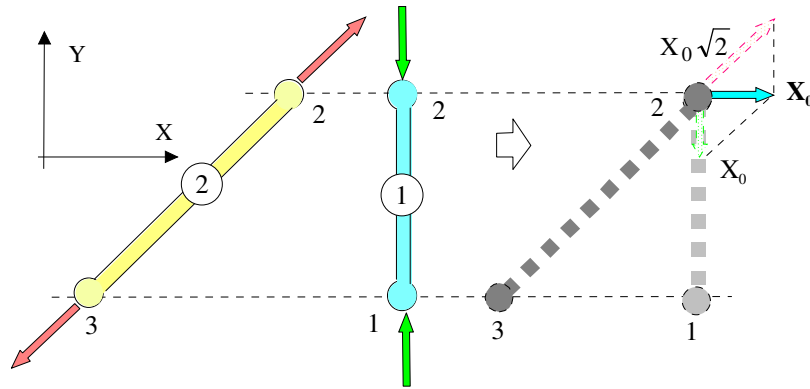
et on obtient pour contrainte normale dans la barre n°1 : $\sigma_x = \frac{\mathcal{N}}{S} = -\frac{X_0}{S}$ (compression)

d'une manière analogue pour l'élément n°2 : $\mathcal{N} = ES \frac{du(x)}{dx} = \frac{ES}{\ell} (u_3 - u_2) = \frac{ES}{\ell} \times \frac{X_0 \ell \sqrt{2}}{ES} = X_0 \sqrt{2}$

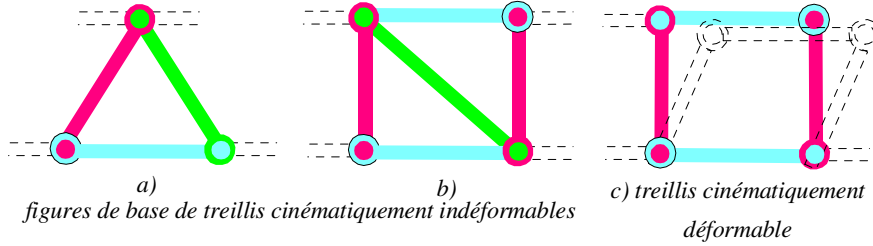
d'où une contrainte normale dans la barre : $\sigma_x = \frac{\mathcal{N}}{S} = \frac{X_0}{S} \sqrt{2}$ (traction)

REMARQUES

□ La figure précédente représente les deux éléments en équilibre sous l'action des efforts nodaux. On vérifie bien par exemple, sur la figure ci-dessous que la somme des efforts nodaux au nœud n°2 est égale à l'effort extérieur $X_0 \vec{X}$.



□ Une structure constituée de barres assemblées est appelée treillis. On y fait souvent apparaître le triangle comme figure de base (treillis triangulés) car, pour des barres articulées, le triangle est cinématiquement indéformable, comme le montre la figure suivante.



□ Avant le calcul sur modèles en éléments finis, on utilisait des méthodes spécifiques de calcul "manuel" adaptées notamment aux treillis à base de motifs du type de la figure précédente a). On était amené à introduire les notions d'isostatisme où d'hyperstatisme intérieur à la structure, selon qu'on pouvait ou non trouver les efforts dans les barres sans faire intervenir les déformations de ces dernières. Avec la modélisation par éléments finis la notion d'hyperstatisme devient "transparente", c'est-à-dire que l'on traite le modèle de la même manière quelle que soit la nature hyperstatique externe et interne, dont on ne s'occupe même plus. Il faut simplement éviter les configurations hypostatiques.

□ On doit néanmoins garder présent à l'esprit que dans de nombreuses applications on a intérêt, **au stade de la conception** d'une structure, à se préoccuper des aspects "isostatiques". Si c'est possible, on obtiendra une conception plus "saine" en diminuant au maximum le caractère hyperstatique. En effet, lorsque la structure est chargée, les sollicitations extérieures induisent d'autant moins d'efforts parasites de liaisons externes ou de cohésion (internes) que les degrés d'hyperstaticité ont été réduits au stade de la conception.

□ Cette réduction des degrés d'hyperstaticité n'est pas toujours compatible avec les solutions constructives. Ainsi les treillis sont le plus souvent réalisés avec des goussets boulonnés ou soudés. Si l'on substitue à cette réalité un modèle de calcul fondé sur des barres articulées comme sur l'exemple plus haut, on néglige certaines composantes des torseurs transmissibles par les liaisons encastrement entre les différentes pièces de structure. L'approximation des barres articulées était couramment pratiquée avec les méthodes "manuelles" de calcul des treillis, et on continue à l'utiliser aussi sur certains codes de calculs de treillis par éléments finis.

